Ergänzung zu »Erstellung eines digitalen Höhenmodells (DHM) mit Dreiecks-Bézier-Flächen«

Norbert Pfeifer

1 Einleitung

Der vorliegende Artikel nimmt Bezug auf die Publikation »Erstellung eines digitalen Höhenmodells (DHM) mit Dreiecks-Bézier-Flächen« von H. Hähnle und E. W. Grafarend in zfv 3/2002. In diesem Beitrag werden Bézier-Dreiecke vorgestellt und die Möglichkeit eines DHMs auf Basis derselben diskutiert. Ein paar Ergänzungen vervollständigen diese interessante Publikation.

Es gibt mehrere Möglichkeiten um aus willkürlich im Raum verteilten Punkten ein Höhenmodell zu erstellen. Eine solche ist die Triangulierung der Punktmenge, aber – zurecht von Hähnle und Grafarend erwähnt – die ›Glattheit‹ eines solchen TINs (triangular irregular network) ist unzureichend. Es ist daher naheliegend, die ebenen Dreiecke eines TINs durch gekrümmte Patches (lokale Flächenstücke) zu ersetzen, die entlang von gemeinsamen Randkurven aneinanderstoßen. An diesen Übergängen muss gewährleistet werden, dass die Tangentialebenen stetig variieren – also nicht nur innerhalb des Patches, sondern auch beim Übergang von einem zum nächsten. Das wird als geometrische Stetigkeit erster Ordnung bezeichnet, eine entsprechende Fläche ist ›glatt‹. Liegen die Punkte in einem regelmäßigen Gitter vor, so ist eine Interpolation durch sog. Tensor-Produkt-Bézier-Flächen (TP-Flächen, Hoschek und Lasser, 1992) sicher besser geeignet. Natürlich ist die Triangulierung viel allgemeiner, außerdem können auch tatsächlich 3-dimensionale Gebilde wie Überhänge und Höhlen damit modelliert werden.

Es gibt also ausreichend Gründe sich mit glatten Höhenmodellen auf Basis einer Triangulierung auseinanderzusetzen. Im Folgenden werden noch weitere Vorteile der Darstellung von bivariaten Polynomen mit der Bernstein-Basis angeführt. Anschliessend wird auf Flächenverbände mit Bézier-Dreiecken eingegangen. Der folgende Text baut auf der oben erwähnten Publikation auf, eine Wiederholung von dort schon Erwähntem wurde weitgehend vermieden. Ebenso ist die Nomenklatur übernommen worden.

2 Ergänzung zu Dreiecks-Bézier-Flächen

Ein wesentlicher Vorteil der Darstellung bivariater Polynome mit den Bernstein-Polynomen $B^n_{i,j,k}$ als Basisfunktionen im Vergleich zur monomischen Darstellung[1] ist die geometrische Bedeutung der Koeffizienten des Polynoms, also der Werte $b_{i,j,k}$. Beispielsweise liegt das Flächenstück stets in der konvexen Hülle des Kontroll-Netzes (Kontroll-Polyeder, Bézier-Netz). Das Netz ist aus Dreiecken zusammengesetzt, bei einem Polynom vom Grad 3 hat man 6 Dreiecke $\triangle(b_{i+1,j,k}, b_{i,j+1,k}, b_{i,j,k+1}), i+j+k+1=n$ (siehe auch Abb. 1.5 in Hähnle und Grafarend, 2002). Ein weiterer großer Vorteil liegt darin, dass eine Konstruktion der Fläche mit dem de-Casteljau-Algorithmus, ähnlich dem der Bézier-Kurven, möglich ist. Nach der Festlegung eines zu konstruierenden Punktes im Parameterbereich – baryzentrische Koordinaten (u, v, w) – wird das Parameterdreieck affin auf die Dreiecke des Kontroll-Polyeders abgebildet. Der Punkt im Parameterdreieck wird dabei mitabgebildet, und genau die Abbilder dieses Punktes liefern wieder ein Kontrollpolyeder, allerdings mit einer Dreiecksreihe weniger. Diese Konstruktion wird auf das soeben erhaltene Netz angewendet und solange iteriert, bis das jeweils neue Kontrollpolyeder auf einen einzelnen Punkt zusammenschrumpft. Dieser ist dann der gesuchte Punkt auf der Fläche. (Diese Aspekte sind auch im Lehrbuch Kraus, 2000 angegeben.)

Damit wird aber nicht nur ein Punkt auf der gekrümmten Dreiecksfläche konstruiert, man erhält auch drei neue Kontroll-Polyeder, die in Summe das gleiche Flächenstück beschreiben. Jedes dieser Polyeder liegt näher an der Fläche als das ursprüngliche. Eine iterative Anwendung dieses Algorithmus' liefert eine Folge von Kontroll-Netzen, die sehr schnell gegen die Polynomfläche konvergiert. Dieser Unterteilungsalgorithmus ist geeignet für die Ausgabe am Bildschirm oder Plotter, da letztendlich sowieso nur gerade Kanten bzw. ebene Dreiecke gezeichnet werden können. Die Anzahl der Iterationen kann von der jeweils gewünschten Auflösung abhängig gemacht werden. Auch für Schnittalgorithmen werden die Polynome häufig in Polyeder umgewandelt. Weitere Angaben zu Bézier-Dreiecken, insbesondere die sog. Fundamentalrekursion, sind in Hoschek und Lasser (1992) zu finden.

1 Die Monome, also z. B. 1, u, v, u^2, uv, v^2, u^3, u^2v, uv^2, v^3 bilden eine andere, gebräuchlichere Basis des Raums der Polynome n-ten Grades (hier $n = 3$).

2 Anschaulich ist das im Kurvenfall. Haben zwei Kurven in ihrem gemeinsamen Endpunkt die gleiche Tangente, so sind sie geometrisch stetig 1. Ordnung, also G1-stetig. Ist auch die Länge des Tangentenvektors gleich, also der Betrag der Kurvendurchschreitungsgeschwindigkeit, so ist die zusammengesetzte Kurve einmal stetig differenzierbar, also C1-stetig.

Eine weitere Ergänzung zu dem Artikel Hähnle und Grafarend (2002) soll noch gestattet sein. Die Bedingung für einen glatten Anschluss zweier Bézier-Dreiecke lässt sich etwas allgemeiner formulieren als in den Formeln (1.17) und (1.18) des angegebenen Artikels. Dort sind die Bedingungen für einen C1-Anschluss wiedergegeben, was der Stetigkeit im ›klassischen‹ Sinne entspricht. Die Bézier-Flächen werden über einer gemeinsamen Parameterebene parametrisiert, was aber schwierig und oft gar nicht nötig ist. Die geometrische Stetigkeit (G1) hingegenist eine etwas schwächere Forderung. Nur die der jeweiligen Ableitung entsprechenden geometrischen Größen müssen stetig variieren, Lage und Größe der Parameterdreiecke zueinander sind unerheblich[2]. Im ersten Fall wird die Bezeichnung C1 gewählt, wohingegen die geometrische Stetigkeit als G1 (auch GC1, bzw. VC1 für »visual continuity of order 1«, Tangentialebenenstetigkeit) abgekürzt wird. Wie im angegeben Artikel sei $X_1(u, v, w)$ der ›linke‹ Patch und $X_2(u', v, w)$ der ›rechte‹ Patch, mit denselben Kontrollpunkten $b^1_{0,j,k} = b^2_{0,j,k}$. Die beiden Patches stoßen also entlang der Parameterlinie $v + w = 1$ zusammen, der G0-Anschluss ist gewährleistet. Mit $t = v$ lässt sich demnach schreiben $X_1(0, t, 1-t) = X_2(0, t, 1-t)$, die Ableitung entlang der Randkurve ist $\frac{\partial}{\partial t}X_1(0, t, 1-t)$. Eine Querableitung (d.h. quer zur Randkurve) in X_1 ist $\frac{\partial}{\partial u}X_1(0, t, 1-t)$ und für X_2 ist die entsprechende Querableitung $\frac{\partial}{\partial u'}X_2(0, t, 1-t)$. Die Koplanaritätsbedingung der beiden Querableitungen und der Tangente im Randkurvenpunkt ergibt sich zu:

$$\alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}X_1(0,t,1-t) + \beta(t)\frac{\partial}{\partial u}X_1(0,t,1-t) + \\ + \gamma(t)\frac{\partial}{\partial u'}X_2(0,t,1-t) = 0.$$

Die triviale Lösung $\alpha(t) = \beta(t) = \gamma(t) \equiv 0$ muss natürlich ausgeschlossen werden. Anwenden lässt sich diese Formel z.B. bei den sog. Splitting-Schemata (siehe unten): Nach einer Festlegung der Kontroll-Punkte der Randkurven (speziell $b_{0,j,k}$, aber auch der anderen äußeren Kontroll-Punkte), und der Forderung, dass die Funktionen α, β und γ bspw. lineare Polynome sind, lassen sich einfache Bedingungen für b^1_{111} und b^2_{111} angeben, die einen G1-Anschluss sicherstellen.

3 Flächenverbände

Unter einem Flächenverband versteht man eine Ansammlung von Patches, die eine Fläche beschreiben. Wie oben erwähnt, strebt man dabei nicht unbedingt an, dass die Fläche (das DHM) über einer gemeinsamen Parameterebene parametrisiert wird. Bei Verwendung von Dreiecks-Patches ist die übliche Vorgangsweise die, dass nach der Triangulation der gegebenen Punkte Randkurven bestimmt werden, die die jeweiligen Verbindungskanten zwischen zwei benachbarten Punkten ersetzen. Die Randkurven, die in einem Knoten zusammentreffen, müssen zu einer gemeinsamen Tangentialebene in diesem Punkt passen, sonst ist die Erstellung einer glatten Fläche nicht möglich. Im nächsten Schritt werden Patches bestimmt, die die Randkurven interpolieren. Außerdem müssen die Tangentialebenen benachbarter Patches entlang der gemeinsamen Randkurven stetig ineinander übergehen. Betrachtet man alle Patches, die in einem ausgewählten Knoten zusammentreffen, so ergibt sich das sog. Eckenumschlussproblem (vertex consistency problem). Benachbarte Dreiecke sollen einen G1-Anschluss haben. Das beeinflusst auch die Kontrollpunkte im Inneren des Kontroll-Netzes (im vorliegenden Fall also b_{111}). Durch die wechselseitigen Anschlüsse entsteht ein geschlossener Kreis von Bedingungen, der nicht immer eine Lösung hat. Aus dieser Sackgasse gibt es verschiedene Auswege.

- **Grad des Polynoms:** Wenn jedes Bézier-Dreieck Graph einer bivariaten Funktion ist, also in der Form $z = f(x,y)$ darstellbar, so gibt es die bekannte Lösung mit quintischen Flächenstücken (5. Grad, complete quintic, Barnhill und Farin, 1981), die auch in Preusser (1984) beschrieben ist. Auch im vektor-wertigen Fall ist eine solche Lösung möglich.
- **Splitting:** Die ursprünglichen Dreiecks-Patches werden als Makro-Patches bezeichnet und in jeweils drei Mikro-Patches aufgeteilt. Bei der Wahl der inneren Randkurven, also jener zwischen den Mikro-Patches, gibt es ausreichend viele Freiheitsgrade, sodass Glattheit entlang aller Randkurven sichergestellt werden kann. Ein Beispiel ist der Clough-Tocher-Interpolant (Clough und Tocher, 1965).
- **Blending:** Es werden keine polynomialen Flächenstücke verwendet, sondern gewichtete Kombinationen aus mehreren – z. B. drei – Dreiecks-Patches (z. B. Bézier-Dreiecken). Ein photogrammetrisches Anwendungsbeispiel mit dem transfiniten Interpolant von Nielson (1987) ist in Schlüter (1999) zu finden.
- **εG1:** Darunter versteht man approximative Glattheit, man spricht von Epsilon-Stetigkeit. Man verzichtet auf exakte Glattheit entlang der Randkurven und strebt nach möglichst kleinen Winkeln zwischen den Tangentialebenen entlang der Randkurven benachbarter Patches. Ein solcher Vorschlag ist in Pfeifer und Pottmann (1996) angegeben.

4 Schlussbemerkungen

Die von Hähnle und Grafarend im Schlussabschnitt geforderten »Algorithmen zur Berechnung von Dreiecks-Bézier-Flächen kubischer Art« sind teilweise vorhanden. Jede der angeführten Methoden hat aber ihre Nachteile. Durch eine höhere Anzahl von Freiheitsgraden kann zwar die gewünschte Stetigkeit erreicht werden, oft sind aber die Krümmungen innerhalb des Patches ungünstig verteilt (Mann et al., 1992). Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung sog. Unterteilungsflächen (subdivision surfaces), bei denen vorderhand gar keine gekrümmten Patches bestimmt werden. Ausgangspunkt ist auch hier die ursprüngliche Triangulierung der gegebenen Punkte. Durch simultanes Einfügen von Punkten über den Kanten der Triangulierung wird dieselbe verfeinert, wobei die Positionen der neuen Punkte so gewählt werden können, dass die Glattheit der Triangulierung zunimmt. Die Winkel zwischen benachbarten Dreiecken nähern sich also 180°, die Grenz-Fläche der iterativen Verfeinerung ist eine glatte Fläche. Eine Übersicht über diese Methoden ist in Zorin und Schröder (2000) zu finden.

Auf jeden Fall ist die Erstellung eines Höhenmodells auf Basis einer Triangulierung ein spannendes Betätigungsfeld, sowohl vonseiten der Forschung als auch vonseiten der Anwendung. In diesem Sinne ist zu hoffen, dass von der Arbeit Hähnles und Grafarends ein starker Impuls ausgeht, und die Geländedarstellung im Vermessungswesen ›glatt‹ und ›wirklich 3D‹ – also ›überhängend‹ – wird.

Danksagung

Diese Forschung wurde durch den FWF (Österreichischer Fonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung), Projekt-Nr. P14083-MAT, unterstützt.

Literatur

Barnhill, R. und Farin, G.: C^1 quintic interpolation over triangles: two explicit representations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 17, pp. 1763–1778, 1981.

Clough, R. und Tocher, J.: Finite element stiffness matrices for the analysis of plate blending. In: *Proceedings of the 1st Conference on Matrix Methodes in Structural Mechanics*, pp. 515–545, 1965.

Hähnle, H. und Grafarend, E. W.: Erstellung eines digitalen Höhenmodells (DHM) mit Dreiecks-Bézier-Flächen. *zfv – Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformation und Landmanagement* 127 (3), S. 193–199, 2002.

Hoschek, J. und Lasser, D.: *Grundlagen der goemetrischen Datenverarbeitung.* Teubner Stuttgart, 2. Auflage, 1992.

Kraus, K.: *Photogrammetrie, Band 3, Topographische Informationssysteme.* Dümmler, 2000.

Mann, S., Loop, C., Lounsbery, M., Meyers, D., Painter, J., DeRose, T. und Sloan, K.: A Survey of Parametric Scattered Data Fitting Using Triangular Interpolants. In: Hagen, H., Editor, *Curve and Surface Design.* SIAM Publications, 1992.

Nielson, G. M.: A visually continous Transfinite triangular Interpolant. In: Farin, G., editor, *Geometric Modeling: Applications and new trends*, pp. 235–245. SIAM Publications, 1987.

Pfeifer, N. und Pottmann, H.: Surface models on the basis of a triangular mesh – surface reconstruction. In: *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing, Vol. XXXI, Part B3*, pp. 638–643, Vienna, Austria, 1996.

Preusser, A.: Bivariate Interpolation über Dreieckselementen durch Polynome 5. Ordnung mit C1-Kontinuität. *ZfV – Zeitschrift für Vermessungswesen* 109 (6), S. 292–301, 1984.

Schlüter, M.: *Von der 2 1/2D- zur 3D-Flächenrekonstruktion für die photogrammetrische Rekonstruktion im Objektraum.* DGK, Reihe C, Nr. 506, 1999.

Zorin, D. und Schröder, P.: Subdivision for modeling and animation. SIGGRAPH 2000 Course Notes. http://www.multires.caltech.edu/pubs/pubs.htm, 2000.

Anschrift des Autors
Dipl.-Ing. Norbert Pfeifer
Institut für Photogrammetrie und Fernerkundung
Technische Universität Wien
Gußhausstraße 27–29, A-1040 Wien
Tel.: +43-1-58801-12212, Fax: +43-1-58801-12299
np@ipf.tuwien.ac.at