# Die Reduktionen von GRACE-SST Daten zwecks Aufbereitung zu einer Spektralanalyse

Chunfang Cui und Dieter Lelgemann

**Zusammenfassung**
Die zur Bestimmung der Kugelfunktionskoeffizienten des Erdgravitationspotentials gemessenen GRACE-SST-Daten können mittels einer Encke-Methode so reduziert werden, als ob die Satelliten auf einem kreisförmigen, zyklischen Orbit geflogen wären. Die sog. »Lumped coefficients« derart reduzierter Daten sind mit den Kugelfunktionskoeffizienten über eine in kleine Blöcke zerfallende Normalgleichungsmatrix verknüpft.

***Summary***
*GRACE-SST-Data observed for the purpose of the determination of spherical harmonics of the Earth gravitational field can be reduced by a method developed by Encke as if the satellites had flown in a circular cyclic (repeating) orbit. The so-called »lumped coefficients« of those reduced data are connected to the spherical harmonics by a very sparse normal equation matrix.*

## 1 Einführung und Zielsetzung

Ziel der GRACE-Mission ist es, mittels Satellite-to-Satellite-Tracking (SST)-Daten das globale Gravitationsfelde der Erde – in Form von Kugelfunktionskoeffizienten – sowie dessen zeitliche Änderungen zu bestimmen.

Traditionell verwendet die Geodäsie zur Datenanalyse zwei unterschiedliche methodische Konzepte:

- man nutzt die Original-Messdaten und ein entsprechend kompliziertes funktionales (d.h. geometrisch-physikalisches) Modell
- man reduziert zunächst die Original-Messdaten mit dem Ziel, die reduzierten Messdaten mit einem möglichst einfachen Modell zu beschreiben, das im Idealfall nur noch die gewünschten Größen (im Fall von SST die Kugelfunktionskoeffizienten) als unbekannte Parameter enthält.

Beide Methoden sollten, sachgerecht durchgeführt, zu identischen Resultaten führen.

Ziel einer SST-Datenreduktion ist es, diese so zu reduzieren, als ob der Satellit auf einem **kreisförmigen, zyklischen Orbit** fliegen würde. Die Original-Messdaten sind hierzu um folgende Effekte zu reduzieren:

a) Oberflächenkräfte (mittels Akzelerometerdaten)
b) Drittkörper-Gravitationseffekte (Sonne/Mond)
c) Gezeitenkräfte (Massenmodell insbesondere für Ozeangezeiten)
d) Reduktion wegen der Exzentrizität $e \neq 0$ der mittleren Bahnellipse.

Eine derartige Datenreduktion lässt sich mittels einer von dem früheren Direktor der Berliner Sternwarte Johann Franz Encke (1791-1865) konzipierten Methode durchführen, wie im Folgenden gezeigt wird. Der Anfangs-Zustandsvektor der hier so genannten »Encke-Bahn«, auf die der Satellit fliegen würde, wenn nur die Erdgravitationskräfte auf ihn wirken würden, sollte im Hinblick auf die Spektralanalyse so gewählt werden, dass diese Bahn einem zyklischen (repeating) Orbit entspricht.

Das Spektrum der Bahnstörungen und damit der SST-Daten eines zyklischen Orbits ist wohl definiert. In einem weiteren Auswerteschritt können daher, bei (mittels einer analytischen Integration der Bewegungsgleichungen bestimmten und damit) bekannten Frequenzen für die SST-Daten, zunächst SST-»Lumped« Koeffizienten berechnet werden und dann aus diesen mittels eines in kleine Blöcke zerfallenden Normalgleichungssystems die Kugelfunktionskoeffizienten des Erdgravitationsfeldes.

## 2 Bahnreduktion mittels der Encke-Methode

### 2.1 Encke-Zerlegung des Systems der Bewegungsgleichungen

Es sei

$$\frac{dZ}{dt} = \Phi + \Delta\Phi \tag{2.1.1}$$

ein System von Differentialgleichungen, wobei $Z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ der unbekannte Zustandsvektor sei; $\Phi$ und $\Delta\Phi$ sind bekannte Funktion von $Z$ und $t$, und

$$\|\Delta\Phi\| / \|\Phi\| = O(\varepsilon) << 1 .$$

Das System (2.1.1) ist unter der Anfangsbedingung

$$Z(t_0) = Z_0 \tag{2.1.2}$$

zu lösen. Es sei weiter

$$\bar{Z} = \bar{Z}(t, Z_0) \tag{2.1.3}$$

die Lösung des reduzierten Systems

$$\frac{d\bar{Z}}{dt} = \Phi(\bar{Z}) \tag{2.1.4}$$

unter der Anfangsbedingung

$$\bar{Z}(t_0) = Z_0 \,. \tag{2.1.5}$$

Damit lässt sich die Lösung des System (2.1.1) zerlegen in

$$Z(t) = \bar{Z}(t) + \Delta Z(t)\,, \tag{2.1.6}$$

wobei die Funktion $\Delta Z(t)$ das System

$$\frac{d\Delta Z}{dt} = \Phi(Z,t) - \Phi(\bar{Z},t) + \Delta\Phi(Z,t) \tag{2.1.7}$$

und die Anfangsbedingungen

$$\Delta Z(t_0) = 0 \tag{2.1.8}$$

erfüllt. Linearisierung führt zu

$$\frac{d\Delta Z}{dt} = \left.\frac{\partial \Phi(Z,t)}{\partial Z}\right|_{Z=\bar{Z}} \Delta Z + \Delta\Phi(\bar{Z},t) \tag{2.1.9}$$

Das sich ergebende System (2.1.9) erweist sich als lineares System und lässt sich unter der Anfangsbedingung (2.1.8) (numerisch oder analytisch) ohne Schwierigkeiten lösen.

## 2.2 Anwendung der Encke-Methode zur Bahnreduktion

Das Gleichungssystem der Satellitenbewegung sei angegeben durch

$$\frac{d}{dt}\dot{r} = \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial R_a}{\partial r} + f_1^g\,,$$

$$\frac{d}{dt}r = -\frac{\partial F}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial R_a}{\partial \dot{r}}\,,$$

$$\frac{d}{dt}G = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial R_a}{\partial u} + r f_2^g\,,$$

$$\frac{d}{dt}u = -\frac{\partial F}{\partial G} - \frac{\partial R_a}{\partial G} - \frac{r}{G}\cot i \sin u f_3^g$$

$$\frac{d}{dt}H = \frac{\partial F}{\partial \Omega} + \frac{\partial R_a}{\partial \Omega} + r\left(\cos i f_2^g - \sin i \cos u f_3^g\right),$$

$$\frac{d}{dt}\Omega = -\frac{\partial F}{\partial H} - \frac{\partial R_a}{\partial H} + \frac{r}{G}(\sin i)^{-1} \sin u f_3^g \tag{2.2.1}$$

(Gauß-Lagrange-Gleichungen.)

Dabei sind $Z = (\dot{r}, G, H; r, u, \Omega)$ die die Bewegung beschreibenden Hill-Variablen ($r$ und $\dot{r}$ – der Radiusvektor und die radiale Geschwindigkeit, $G$ und $H$ – der Drehimpuls und seine polare Komponente, $u$ – das Argument der Breite des Satelliten, $\Omega$ – die Länge des aufsteigenden Bahnknotens), die als Unbekannte zu betrachten sind.

$$\mathrm{F} = -\frac{1}{2}\dot{r} - \frac{1}{2}\frac{G^2}{r^2} + V = -\frac{1}{2}\dot{r} - \frac{1}{2}\frac{G^2}{r^2} + \frac{\mu}{r} + R \tag{2.2.2}$$

ist die Hamilton Funktion. $V$ ist das Potential des Erdschwerefeldes; $\mu/r$ ist sein Hauptteil (Punktmassenpotential); $R$ ist der Störanteil. $R_a$ ist die Störfunktion infolge der Gravitationswirkung der Sonne und des Mondes. $(f_1^g, f_2^g, f_3^g)$ sind die Komponenten sonstiger auf die Satellitenbewegung wirkender Kräfte bezüglich des Gauß-Koordinatensystems (radiale, transversale und normale Komponente).

Die rein durch die Erdgravitation gesteuerte Satellitenbewegung $(\bar{Z} = (\bar{\dot{r}}, \bar{G}, \bar{H}; \bar{r}, \bar{u}, \bar{\Omega}))$ wird bestimmt durch das Gleichungssystem

$$\frac{d}{dt}\bar{\dot{r}} = \left.\frac{\partial F}{\partial r}\right|_{z=\bar{z}}, \quad \frac{d}{dt}\bar{G} = \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{z=\bar{z}}, \quad \frac{d}{dt}\bar{H} = \left.\frac{\partial F}{\partial \Omega}\right|_{z=\bar{z}},$$

$$\frac{d}{dt}\bar{r} = -\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{r}}\right|_{z=\bar{z}}, \quad \frac{d}{dt}\bar{u} = -\left.\frac{\partial F}{\partial G}\right|_{z=\bar{z}}, \quad \frac{d}{dt}\bar{\Omega} = -\left.\frac{\partial F}{\partial H}\right|_{z=\bar{z}}. \tag{2.2.3}$$

Das linearisierte reduzierte System nimmt dann die in Box 1 dargestellte Form an.

Dabei ist berücksichtigt, dass die Funktion $R$ von $\dot{r}$ unabhängig ist sowie die partielle Ableitung $\partial R/\partial\Omega$ von der Größenordnung $O\left(C_{(2)0}{}^2\right)$ und daher vernachlässigt werden kann. Zur Berechnung der partiellen Ableitungen von $R$ brauchen nur die $C_{(2)0}$-Terme berücksichtigt werden; es ergibt sich daher

$$\frac{d}{dt}\Delta\dot r=\left(\frac{2G}{r^3}+\frac{\partial}{\partial G}\frac{\partial R}{\partial r}\right)\Delta G+\frac{\partial}{\partial H}\frac{\partial R}{\partial r}\Delta H+\left(-3\frac{G^2}{r^4}+2\frac{\mu}{r^3}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial R}{\partial r}\right)\Delta r+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial r}\Delta u-\frac{\partial R_a}{\partial r}+f_1^g$$

$$\frac{d}{dt}\Delta G=\frac{\partial}{\partial G}\frac{\partial R}{\partial u}\Delta G+\frac{\partial}{\partial H}\frac{\partial R}{\partial u}\Delta H+\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial R}{\partial u}\Delta r+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial u}\Delta u+\frac{\partial R_a}{\partial u}+rf_2^g,$$

$$\frac{d}{dt}\Delta H=\frac{\partial R_a}{\partial\Omega}+r\left(\cos i f_2^g-\sin i\cos u f_3^g\right),$$

$$\frac{d}{dt}\Delta r=\Delta\dot r,$$

$$\frac{d}{dt}\Delta u=\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\partial}{\partial G}\frac{\partial R}{\partial G}\right)\Delta G-\frac{\partial}{\partial H}\frac{\partial R}{\partial G}\Delta H-\left(2\frac{G}{r^3}+\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial R}{\partial G}\right)\Delta r-\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial G}\Delta u-\frac{\partial R_a}{\partial G}-\frac{r}{G}\cot i\sin u f_3^g,$$

$$\frac{d}{dt}\Delta\Omega=-\frac{\partial}{\partial G}\frac{\partial R}{\partial H}\Delta G-\frac{\partial}{\partial H}\frac{\partial R}{\partial H}\Delta H-\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial R}{\partial H}\Delta r-\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial H}\Delta u-\frac{\partial R_a}{\partial H}+\frac{r}{G}(\sin i)^{-1}\sin u f_3^g. \quad (2.2.4)$$

Box 1

$$R=\frac{1}{4}\frac{\mu}{r}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2C_{(2)0}\left(\left(1-3\cos^2 i\right)-3\left(1-\cos^2 i\right)\cos 2u\right)+O\left(C_{(2)0}{}^2\right).$$

$$\frac{\partial R}{\partial G}=\frac{3}{2}\frac{\mu}{rG}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2C_{(2)0}\cos^2 i\,(1-\cos 2u)$$

$$\frac{\partial}{\partial G}\frac{\partial R}{\partial G}=-\frac{9}{2}\frac{\mu}{rG^2}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2C_{(2)0}\cos^2 i\,(1-\cos 2u)$$

$$\frac{\partial}{\partial H}\frac{\partial R}{\partial G}=3\frac{\mu}{rG^2}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2C_{(2)0}\cos i\,(1-\cos 2u)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial R}{\partial G}=-\frac{9}{2}\frac{\mu}{r^2G}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2C_{(2)0}\cos^2 i\,(1-\cos 2u)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial G}=3\frac{\mu}{rG}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2C_{(2)0}\cos^2 i\sin 2u$$

$$\frac{\partial R}{\partial H}=-\frac{3}{2}\frac{\mu}{rG}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2C_{(2)0}\cos i\,(1-\cos 2u)$$

$$\frac{\partial}{\partial H}\frac{\partial R}{\partial H}=-\frac{3}{2}\frac{\mu}{rG^2}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2C_{(2)0}(1-\cos 2u)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial R}{\partial H}=\frac{9}{2}\frac{\mu}{r^2G}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2C_{(2)0}\cos i\,(1-\cos 2u)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial H}=-3\frac{\mu}{rG}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2C_{(2)0}\cos i\sin 2u$$

$$\frac{\partial R}{\partial r}=-\frac{3}{4}\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2C_{(2)0}\left(\left(1-3\cos^2 i\right)-3\left(1-\cos^2 i\right)\cos 2u\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial R}{\partial r}=3\frac{\mu}{r^3}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2C_{(2)0}\left(\left(1-3\cos^2 i\right)-3\left(1-\cos^2 i\right)\cos 2u\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial r}=-\frac{9}{2}\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2C_{(2)0}\left(1-\cos^2 i\right)\sin 2u$$

$$\frac{\partial R}{\partial u}=\frac{3}{2}\frac{\mu}{r}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2C_{(2)0}\left(1-\cos^2 i\right)\sin 2u$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial u}=3\frac{\mu}{r}\left(\frac{a_e}{r}\right)^2C_{(2)0}\left(1-\cos^2 i\right)\cos 2u. \quad (2.2.5)$$

## 2.3 Eine durch das Erdgravitationsfeld erzeugte Bahn

Die durch das Erdgravitationsfeld gesteuerte Bahn sei mittels einer analytischen Lösung angegeben:

$$X=X+\frac{\partial s}{\partial Y}+\ldots \qquad Y=Y-\frac{\partial s}{\partial X}+\ldots \quad (2.3.1)$$

wobei $X=(\dot r,G,H)$, $Y=(r,u,\Omega)$ die Hill-Variablen sind; $s=s(X,Y)$ ist die sog. Erzeugende Funktion.

Die Anwendung der Formel (2.3.1) folgt der Regel: Alle Größen auf der rechten Seite entsprechen der mittleren Bahn, während alle Größen auf der linken Seite die gestörte Bahn angeben.

### 2.3.1 Definition der mittleren Bahn

$G$ und $H$:

$$G=const, \qquad H=const \quad (2.3.2)$$

und daher

$i=const$.

$\dot{r}$ **und** $r$**:**

$$\frac{\Gamma^2}{\mu r}-1=\rho-1=e\cos f\,,\qquad \frac{\Gamma\dot{r}}{\mu}=\upsilon=e\sin f\,. \tag{2.3.3}$$

wobei $\Gamma=\Gamma(G,H)$ eine Funktion der Variablen $G$ und $H$ ist, welche sich mittels

$$G^2=\Gamma^2\left\{1+\frac{1}{2}\gamma_{(2)0}\left(1-3\cos^2 i\right)+2\sum_{p\geq 2}\gamma_{(2p)0}\,\mathrm{F}_{(2p)0p}(i)\right\} \tag{2.3.4}$$

definieren lässt mit der Abkürzung

$$\gamma_{(2p)0}=\left(\frac{\mu a_e}{\Gamma^2}\right)^{2p}c_{(2p)0}\,.$$

Offensichtlich erhält man dann $\Gamma=const$.

Die zeitliche Änderung der wahren Anomalie $f$ wird zerlegt in

$$\begin{aligned}&f=M+\varepsilon\,,\\&M-M_0=n\left(t-t_0\right).\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Die Größe $\varepsilon$, »equation of centre« oder Zentrumsgleichung genannt, ist eine bekannte periodische Funktion der mittleren Anomalie $M$ und hängt von der Exzentrizität $e$ ab, wobei $e=const$. Die »mean motion« $n=dM/dt$ lässt sich berechnen mittels

$$n=\left(1+\xi\right)\frac{\mu^2}{\Gamma^3}\left(1-e^2\right)^{3/2} \tag{2.3.6}$$

wobei

$$\begin{aligned}\xi=-\frac{3}{128}\gamma_{(2)0}^2\Big(&10\left(1-6\cos^2 i+5\cos^4 i\right)\\&+\left(5-18\cos^2 i+5\cos^4 i\right)e^2\Big)\left(1-e^2\right)^{1/2}\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

ein kleiner Korrektionsterm ist.

$u$ **und** $\Omega$ werden wie in Box 2 abgebildet definiert.

$u$ **und** $\Omega$**:**

$$\begin{aligned}u-u_0&=\frac{\partial\Gamma}{\partial G}\left(f-f_0\right)+\eta\frac{\mu^2}{\Gamma^3}\left(1-e^2\right)^{3/2}\left(t-t_0\right),\\ \Omega-\Omega_0&=\frac{\partial\Gamma}{\partial H}\left(f-f_0\right)+\zeta\frac{\mu^2}{\Gamma^3}\left(1-e^2\right)^{3/2}\left(t-t_0\right),\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}\eta&=\frac{3}{128}\gamma_{(2)0}^2\left(4\frac{\Gamma}{G}\left(4\left(4-5\cos^2 i\right)+\left(9-5\cos^2 i\right)e^2\right)\cos^2 i-\frac{\partial\Gamma}{\partial G}\left(2\left(15-66\cos^2 i+35\cos^4 i\right)+\left(5-18\cos^2 i+5\cos^4 i\right)e^2\right)\right)\\ \zeta&=-\frac{3}{128}\gamma_{(2)0}^2\left(4\frac{\Gamma}{G}\left(4\left(4-5\cos^2 i\right)+\left(9-5\cos^2 i\right)e^2\right)\cos i+\frac{\partial\Gamma}{\partial H}\left(2\left(15-66\cos^2 i+35\cos^4 i\right)+\left(5-18\cos^2 i+5\cos^4 i\right)e^2\right)\right).\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Die Größen $\Gamma/G$, $\partial\Gamma/\partial G$ und $\partial\Gamma/\partial H$ sind zu berechnen mittels

$$\frac{\Gamma}{G}=1-\frac{1}{4}\gamma_{(2)0}\left(1-\frac{3}{8}\gamma_{(2)0}\left(1-3\cos^2 i\right)\right)\left(1-3\cos^2 i\right)-\sum_{p\geq 2}\gamma_{(2p)0}\,\mathrm{F}_{(2p)0p}(i) \tag{2.3.10}$$

und

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial G}=1+\sigma\,,\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial H}=\tau \tag{2.3.11}$$

mit den Abkürzungen

$$\sigma=\frac{3}{4}\gamma_{(2)0}\left(\left(1-5\cos^2 i\right)+\frac{1}{24}\gamma_{(2)0}\left(11-45\cos^2 i\right)\left(1-3\cos^2 i\right)\right)+\sum\nolimits_p\gamma_{(2p)0}\left(4p-1\right)\mathrm{F}_{(2p)0p}(i)-\sum\nolimits_p\gamma_{(2p)0}\,\mathrm{F}'_{(2p)0p}(i)\cot i$$

$$\tau=\frac{3}{2}\gamma_{(2)0}\left(1+\frac{1}{4}\gamma_{(2)0}\left(1-3c^2\right)\right)c+\frac{1}{\sin i}\sum\nolimits_p\gamma_{(2p)0}\,\mathrm{F}'_{(2p)0p}(i)\,. \tag{2.3.12}$$

**Box 2**

### 2.3.2 Die Erzeugende Funktion und ihre partielle Ableitungen

Für die Anwendung der Encke-Methode sind nur die Geopotentialstörungen der ersten Ordnung (Größenordnung von $C_{(2)0} \approx 10^{-3}$) zu berücksichtigen; entsprechende Terme der Erzeugenden sind

$$\begin{aligned} s_1 = & -\frac{1}{8}\Gamma\gamma_{(2)0}\left\{\left(1-\cos^2 i\right)\left(3\sin 2u + 4\left(\rho-1\right)\sin 2u - 2\upsilon\cos 2u\right)\right. \\ & \left. -2\left(1-3\cos^2 i\right)\upsilon\right\} - \Gamma\left(\sigma\right)^{-1} L^{(o)} e\cos\left(u-f\right) \\ & + \frac{1}{128}\Gamma\left\{3\gamma^2_{(2)0}\sin^2 i\left(1-15\cos^2 i\right)e^2\sin\left(2u-2f\right)+16L^{(e)}\right\} \\ & \times\left(\sigma\right)^{-1} e^2\sin\left(2u-2f\right)+O\left(C_{(2)0}{}^2\right), \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

wobei

$$L^{(o)} = \sum \gamma_{(1+2p)0}\left(2p\right)F_{(1+2p)0p}\left(i\right),$$

$$L^{(e)} = \sum \gamma_{(2+2p)0}\left(1+2p\right)\left(2p\right)F_{(2+2p)0p}\left(i\right) \tag{2.3.14}$$

die zonalen »Lumped Coefficients« der Bahnvariablen sind. Die sog. Störungen der Bahnvariablen werden durch die partiellen Ableitungen der Erzeugenden Funktion bestimmt; diese sind in Box 3 dargestellt.

### 2.4 Die Kraftterme

Es gibt zwei Arten von Krafttermen im Gleichungssystem (2.2.4): die luni-solaren Störkräfte (erfasst durch die partiellen Ableitungen der Störfunktion $R_a$) und die mittels Akzelerometer messbaren Oberflächenkräfte (repräsentiert durch ihre Gauß-Komponenten $f_1^g, f_2^g, f_3^g$). Die luni-solare Störfunktion ist mittels

$$V_a = \frac{\mu_a}{r_a}\left(\frac{r}{r_a}\right)^2 P_{20}\left(\cos\gamma_a\right) \tag{2.4.1}$$

angegeben, wobei $\mu_a$ und $r_a$ den Gravitationskoeffizienten und den geozentrischen Radiusvektor des Störkörpers (Sonne oder Mond) angeben; $P_{20}(\cos\gamma_a)$ ist das Legendre-Polynom zweiter Ordnung; $\gamma_a$ ist die geozentrische Elongation zwischen dem Störkörper und dem Satelliten. Die Position des Störkörpers sei mittels seiner Kugelkoordinaten angegeben und die des Satelliten mittels der Bahnvariablen $(r,u,\Omega,i)$; dann erhält man

$$\begin{aligned} \cos\gamma_a = & \sin\theta_a\left(\cos u\cos\left(\Omega-\lambda_a\right)-\sin u\sin\left(\Omega-\lambda_a\right)\cos i\right) \\ & +\cos\theta_a\sin u\sin i \end{aligned}. \tag{2.4.2}$$

Aus (2.4.1) und (2.4.2) lassen sich die partiellen Ableitungen berechnen wie in Box 4 dargestellt.

## 3 Reduktion der Messungen

### 3.1 Datenreduktion zu der reduzierten Bahn

Das Messdatenmodell sei gegeben durch

$$\xi = r\left(u-u_a\right), \tag{3.1.1}$$

wobei $r$ der Radiusvektor der Satelliten ist (für beide Satelliten als gleich angenommen); $u$ und $u_a$ sind die Argumente der Breite der Satelliten (angenommen $u-u_a \ll 1$). Alle in (3.1.1) auftauchenden Variablen sind bezüglich der realen Bahn definiert.

Differentiation ergibt

$$\Delta\xi = \left(u-u_a\right)\Delta r + r\left(\Delta u - \Delta u_a\right),$$

wobei $\Delta$ die Differenz zwischen der realen Bahn und der reduzierten Bahn (d.h. der allein durch die Erdgravitation gesteuerten Bahn); sie sind gegeben durch die Lösung des Gleichungssystem (2.2.4). Da $u-u_a \ll 1$ angenommen wird, ist die Größe $\Delta u - \Delta u_a$ von höherer Ordnung. Das führt zu

$$\Delta\xi = \left(u-u_a\right)\Delta r = \xi\frac{\Delta r}{r}. \tag{3.1.2}$$

Das ist die Formel zur Reduktion der Messdaten infolge der Oberflächenkräfte und der luni-solaren Gravitation. Damit ergibt sich die reduzierte Messung bezüglich der reduzierten Bahn zu

$$\overline{\xi} = \xi - \Delta\xi = \xi\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right) = \xi\frac{\overline{r}}{r}, \tag{3.1.3}$$

wobei $\overline{r}$ der Radius der Satelliten auf einer reduzierten Bahn wäre.

### 3.2 Datenreduktion zur Beseitigung von Komponenten infolge der Abplattung und der Exzentrizität

Das Ziel der SST Mission liegt in der Bestimmung der Kugelfunktionskoeffizienten des Erdschwerefeldes von höherem Grad und Ordnung. Die dazu beitragenden Informationen sind numerisch klein (von der Ordnung $O\left(C_{(2)0}{}^2\right)$). Die Messungen enthalten aber nicht nur derartige Informationen, sondern auch Informationen über die Einflüsse des Abplattungsterms. Die letzteren sind

$$\frac{\partial s_1}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{16}\frac{\Gamma^2}{\mu}\gamma_{(2)0}\left(4\left(1-3\cos^2 i\right)+\sin^2 i\cos 2u-\frac{\sin^2 i\left(1-15\cos^2 i\right)}{\left(1-5\cos^2 i\right)}e\cos\left(2u-f\right)\right)$$
$$-\frac{1}{3}\frac{\Gamma^2}{\mu}\frac{1}{\gamma_{(2)0}\left(1-5\cos^2 i\right)}\left(4L^{(o)}\sin u+L^{(e)}e\cos\left(2u-f\right)\right)+O\left(C_{(2)0}{}^2\right)$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial r} = \frac{1}{16}\frac{\mu}{\Gamma}\left(\gamma_{(2)0}\sin^2 i\left(8\sin 2u-\frac{1-15\cos^2 i}{1-5\cos^2 i}e\sin\left(2u-f\right)\right)+\frac{16}{3\gamma_{(2)0}\left(1-5\cos^2 i\right)}\left(4L^{(o)}\cos u-L^{(e)}e\sin\left(2u-f\right)\right)\right)\rho^2$$
$$+O\left(C_{(2)0}{}^2\right)$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial G} = \frac{1}{4}\gamma_{(2)0}\left(\frac{1}{2}\left(1-7\cos^2 i\right)\sin 2u-2\left(1-6\cos^2 i\right)\upsilon+2\left(1-3\cos^2 i\right)\left(\rho-1\right)\sin 2u-2\left(1-2\cos^2 i\right)\upsilon\cos 2u\right)$$
$$+\frac{1}{32}\gamma_{(2)0}\left(\frac{\left(1-\cos^2 i\right)\left(1-15\cos^2 i\right)}{1-5\cos^2 i}\left(4e\sin\left(2u-f\right)+e^2\sin 2u\right)+\frac{2\left(11\cos^2 i-30\cos^4 i+75\cos^6 i\right)}{\left(1-5\cos^2 i\right)^2}e^2\sin\left(2u-2f\right)\right)$$
$$+\frac{4}{3}\frac{1}{\gamma_{(2)0}\left(1-5\cos^2 i\right)}\left(\left(\tilde{L}^{(o)}-\frac{\partial L^{(o)}}{\partial i}\cot i-\frac{3-35\cos^2 i}{2\left(1-5\cos^2 i\right)}L^{(o)}\right)e\cos\left(u-f\right)-L^{(o)}\left(2\cos u+\frac{1}{2}e\cos\left(u+f\right)\right)\right)$$
$$-\frac{1}{6}\frac{1}{\gamma_{(2)0}\left(1-5\cos^2 i\right)}\left(\left(\tilde{L}^{(e)}-\frac{\partial L^{(e)}}{\partial i}\cot i-\frac{3-25\cos^2 i}{1-5\cos^2 i}L^{(e)}\right)e^2\sin\left(2u-2f\right)-L^{(e)}\left(4e\sin\left(2u-f\right)+e^2\sin 2u\right)\right)$$
$$+O\left(C_{(2)0}{}^2\right)$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial u} = -\frac{1}{16}\Gamma\gamma_{(2)0}\frac{\sin^2 i}{1-5\cos^2 i}\left(4\left(1-5\cos^2 i\right)\left(3\cos 2u+4\left(\rho-1\right)\cos 2u+2\upsilon\sin 2u\right)-\left(1-15\cos^2 i\right)e^2\cos\left(2u-2f\right)\right)$$
$$+\frac{1}{3}\Gamma\frac{1}{\gamma_{(2)0}\left(1-5\cos^2 i\right)}\left(4L^{(o)}e\sin\left(u-f\right)+L^{(e)}e^2\cos\left(2u-2f\right)\right)+O\left(C_{(2)0}{}^2\right)$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial H} = \frac{1}{4}\gamma_{(2)0}\cos i\left(\left(3\sin 2u-6\upsilon+4\left(\rho-1\right)\sin 2u-2\upsilon\cos 2u\right)-\frac{11-30\cos^2 i+75\cos^4 i}{4\left(1-5\cos^2 i\right)^2}e^2\sin\left(2u-2f\right)\right)$$
$$-\frac{4}{3}\frac{e\cos\left(u-f\right)}{\gamma_{(2)0}\left(1-5\cos^2 i\right)}\left(-\frac{1}{\sin i}\frac{\partial L^{(o)}}{\partial i}+\frac{10\cos i}{1-5\cos^2 i}L^{(o)}\right)+\frac{1}{6}\frac{e^2\sin\left(2u-2f\right)}{\gamma_{(2)0}\left(1-5\cos^2 i\right)}\left(-\frac{1}{\sin i}\frac{\partial L^{(e)}}{\partial i}+\frac{10\cos i}{1-5\cos^2 i}L^{(e)}\right)+O\left(C_{(2)0}{}^2\right)$$

$$\frac{\partial s_1}{\partial \Omega} = 0+O\left(C_{(2)0}{}^2\right) \qquad (2.3.15)$$

mit den Abkürzungen

$$\tilde{L}^{(o)} = \sum_{p\geq 1}\gamma_{(1+2p)0}\left(2p\right)\left(4p-3\right)F_{(1+2p)0p}(i)$$
$$\tilde{L}^{(e)} = \sum_{p\geq 0}\gamma_{(2+2p)0}\left(1+2p\right)\left(2p\right)\left(4p-1\right)F_{(2+2p)0p}(i)$$
$$\frac{\partial L^{(o)}}{\partial i} = \sum_{p\geq 1}\gamma_{(1+2p)0}\left(2p\right)F'_{(1+2p)0p}(i) \qquad (2.3.16)$$
$$\frac{\partial L^{(e)}}{\partial i} = \sum_{p\geq 0}\gamma_{(2+2p)0}\left(1+2p\right)\left(2p\right)F'_{(2+2p)0p}(i)$$

Box 3

$$\frac{\partial R_a}{\partial r} = \frac{\mu_a}{r_a^2}\left(\frac{r}{r_a}\right)\left(3\cos^2\gamma_a - 1\right),$$

$$\frac{\partial R_a}{\partial u} = 3\frac{\mu_a}{r_a}\left(\frac{r}{r_a}\right)^2 \cos\gamma_a\left(\cos\theta_a \cos u \sin i - \sin\theta_a\left(\sin u \cos(\Omega-\lambda_a) + \cos u \sin(\Omega-\lambda_a)\cos i\right)\right),$$

$$\frac{\partial R_a}{\partial \Omega} = -3\frac{\mu_a}{r_a}\left(\frac{r}{r_a}\right)^2 \cos\gamma_a \sin\theta_a\left(\cos u \sin(\Omega-\lambda_a) + \sin u \cos(\Omega-\lambda_a)\cos i\right)$$

$$\frac{\partial R_a}{\partial G} = 3\frac{\mu_a}{G r_a}\left(\frac{r}{r_a}\right)^2 \cos\gamma_a\left(\sin\theta_a \sin u \sin(\Omega-\lambda_a)\sin i + \cos\theta_a \sin u \cos i\right)\frac{\cos i}{\sin i}$$

$$\frac{\partial R_a}{\partial H} = -3\frac{\mu_a}{G r_a}\left(\frac{r}{r_a}\right)^2 \cos\gamma_a\left(\sin\theta_a \sin u \sin(\Omega-\lambda_a)\sin i + \cos\theta_a \sin u \cos i\right)\frac{1}{\sin i}. \qquad (2.4.3)$$

Box 4

$$\begin{aligned}\{\xi,\tilde{s}_1\} = &-\frac{1}{4}\left(\frac{\Gamma^2}{\mu}\right)(\Delta M)\left(\gamma_{(2)0}\left(\left(1-3\cos^2 i\right)+2\left(1-\cos^2 i\right)\cos 2u\right)+4(\sigma)^{-1}L^{(o)}\sin u\right)\\ &+\frac{1}{4}\left(\frac{\Gamma^2}{\mu}\right)(\Delta M)\Big\{4\gamma_{(2)0}\left(1-3\cos^2 i\right)(\rho-1)+3\gamma_{(2)0}\left(1-\cos^2 i\right)(\rho-1)\cos 2u+12(\sigma)^{-1}L^{(o)}(\rho-1)\sin u \quad, \qquad (3.2.1)\\ &-(\sigma)^{-1}\left(\frac{3}{16}\gamma_{(2)0}^2\sin^2 i\left(1-15\cos^2 i\right)+L^{(e)}\right)\left((\rho-1)\cos 2u+\upsilon\sin 2u\right)\Big\}\end{aligned}$$

Box 5

numerisch dominierend (von der Ordnung $O\left(C_{(2)0}^{\;(2)0}\right)$) und können möglicherweise die Datenverarbeitung erschweren. Um dies zu vermeiden, werden die Messkomponenten dieser Ordnung aus den Daten abgezogen. Dazu führt man die Erzeugende Funktion (2.3.13) in das Messmodell ein (siehe Cui und Lelgemann 2000); es ergibt sich die in Box 5 dargestellte Form als Modell der zu beseitigenden Einflüsse. Alle weiteren Formeln zur Reduktion der Exzentrizitätseffekte sind (Cui und Lelgemann 2000) zu entnehmen.

## Abschlussbemerkung

Mittels der in (Lelgemann 1983), (Cui und Lelgemann 1995), (Cui 1997), (Lelgemann und Cui 1999) und (Cui und Lelgemann 2000) publizierten Grundlagen und der in dieser Arbeit angegebenen Reduktionsmethode steht nunmehr ein ausgearbeiteter Algorithmus zur Auswertung von GRACE-SST-Daten im Spektralbereich zur Verfügung. Er mag eingesetzt werden als (auch mit einer nur einfachen Computer-Ausstattung praktizierbaren) Alternative zu den bisher entwickelten Methoden einer Datenanalyse im Zeitbereich.

## Literatur

Lelgemann, D.: A linear solution of the equation of motion of an earth-orbiting satellite based on a Lie-Series. Celelestial Mechanics, Vol. 30: 309, 1983.

Cui, Ch., Lelgemann, D.: Analytical dynamic orbit improvement for the evaluation of geodetic-geodynamic satellite data. Journal of Geodesy 70: 83-97, 1995.

Cui, Ch.: Satellite orbit integration based on canonical transformations with special regard to the resonance and coupling effects. D. Geod. Komm. Reihe A, Heft 112, München, 1997.

Lelgemann, D., Cui, Ch. (1999) Bemerkungen über die Gravitationsfeldbestimmung mittels Satellite-to-Satellite Tracking-Daten. ZfV 124: 289-295, 1999.

Cui, Ch., Lelgemann, D.: Low-low SST-observation equation for the determination of the geopotential based on an analytical theory of satellite orbits using Lie-series. Journal of Geodesy 74: 431-440, 2000.

**Anschrift der Autoren:**
Dr.-Ing. Chunfang Cui
Prof. Dr.-Ing. Dieter Lelgemann
Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik, TU Berlin, H12
Straße des 17. Juni 135, D-10623 Berlin