

Zur K-Frage: Kompressionsraten der schnellen Wavelettransformation aus statistischer Sicht

Siegfried Meier

Zusammenfassung

Die Datenkompression ist ein weites Feld: Es existiert eine Fülle von Methoden, z. B. die diskrete Wavelettransformation, die hier unter statistischen Gesichtspunkten betrachtet wird. Im Allgemeinen hängen die Kompressionsraten vom Wavelet und von den Signaleigenschaften ab. Es wurde die Übertragung der letzteren bei der kontinuierlichen und der diskreten Wavelettransformation an Signalen untersucht, die Realisierungen stationärer Gaußprozesse sind. Als Schlüsselparameter der auf Schwellwertbildung beruhenden Kompression wurden das Signal-Rausch-Verhältnis und die Signalkorrelation erkannt. Geeignete Schwellwerte, um die Genauigkeit registrierter und transformierter Signale zu erhalten, wurden durch Modellbildung und in numerischen Experimenten gefunden.

Summary

Data compression is a complex matter: there exists a variety of methods, e. g. the discrete wavelet transformation examined here under statistical points of view. Generally, the compression rates depend on the wavelet type and on the signal qualities. The transition of the latter by continuous and discrete wavelet transformation was investigated at signals being realizations of stationary gaussian processes. The signal-to-noise-ratio and the signal correlation were proved to be crucial parameters of the compression based on thresholding. Appropriate thresholds to keep the accuracy of recorded and transformed signals were examined by modelling as well as by numerical experiments.

1 Vorbemerkungen

Nicht nur Politiker, auch Datenverarbeiter haben ihre K-Frage¹. Die Kompression (K) von Geodaten ist ein weites Feld; es gibt eine Fülle von Möglichkeiten und Methoden der Datenkompression. Für Bilddaten hat sich die Wavelettransformation (WT) als effizient erwiesen; vgl. z. B. Zettler et al. (1990), Louis et al. (1994), Hahn and Kiefner (1998), Kiefner and Hahn (2000), Kiefner (2001). Ein klassisches Beispiel ist die kompakte Speicherung von gescannten Fingerabdrücken. Nun ist die K-Frage in

der Signalverarbeitung nicht die allein zu beantwortende, sondern man verfolgt per WT oft mehrere Ziele, z. B. Lokalisierung gewisser Signalanteile, Approximation der ersten oder zweiten Ableitung des Signals, jeweils verbunden mit Kompression. Auf der Suche nach geeigneten Wavelets, die mehreren Zielen zugleich dienen, wäre es nützlich, die K-Rate vorab schätzen zu können. Leider ist dies – obwohl man weiß, welche Wavelets stärker oder eher schwächer komprimieren – im Allgemeinen nicht oder nur mit großem Aufwand möglich, denn die totale K-Rate hängt sowohl von den Signaleigenschaften als auch vom benutzten Wavelet, ferner von der Diskretisierung der Signale auf der Ordinate (in der Bildverarbeitung Quantisierung genannt) bzw. der mitgeführten Stellenzahl, der Umorganisation der Daten, schließlich von Zielen wie Datenübertragung in Echtzeit oder dauerhafte Speicherung ab, ist also insgesamt ein recht komplexes bzw. vermischtes Problem.

Die Kompressionsmöglichkeit der schnellen WT beruht auf einer Schwellwertbildung: Waveletkoeffizienten (WK) der diskreten Transformation, die einen vorgegebenen Schwellwert (S) betragsmäßig unterschreiten, werden auf Null gesetzt (sog. *hard thresholding*) und die verbleibenden WK kompakt gespeichert. Nun ist bekannt, dass sich S-Probleme häufig nur an Signalen, die Realisierungen stationärer Gauß-Prozesse sind, explizit lösen lassen, und solche bezüglich der WT auch nur numerisch. Der Leser sei also vorgewarnt: Auch aus statistischer Sicht sind mögliche Antworten auf die K-Frage eher qualitative.

Immerhin kann man in Sonderfällen, insbesondere an stationären Gauß-Prozessen, die kritischen Einflussgrößen erkennen und separieren. Ferner kann man Schwellwerte vorab so schätzen, dass die Verformungen der aus den komprimierten WK rücktransformierten Signale (in der Bildverarbeitung Artefakte genannt) in den Grenzen der Erfassungsfehler der ursprünglichen Signale bleiben. So mag es besonders unter dem letztgenannten, praktisch bedeutsamen Gesichtspunkt – geodätisch gesprochen ein Fehlervoranschlag – nicht ganz abwegig sein, bekannte numerische Probleme aus statistischer Sicht zu betrachten.

An sich ist diese Betrachtungsweise nicht neu: Der Sammelband von Antoniadis and Oppenheim (1995) enthält diverse Arbeiten aus Mathematikerhand, nach Abstraktionsgrad und Notation nicht eben leicht von Anwendern zu verstehen. Deshalb hat sich der Verfasser bemüht, nur Werkzeuge zu verwenden, die dem Signalverarbeiter vertraut sind: elementare Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung, lineare Filter, Varianzfortpflanzung bei linearen Integral- und Vektortransformationen.

¹ Das vom Verfasser benutzte Schlagwort bewegte im Vorfeld der Wahlen zum Deutschen Bundestag im Jahre 2002 die Gemüter. Hier steht es als Synonym für die »Qual der Wahl« aus Kandidaten kompressionspotenter Wavelets.

2 Schnelle Wavelettransformation ohne und mit Kompression

2.1 Transformation ohne Kompression

Ein Signal $f(t)$ sei im Originalbereich durch $N = 2^n$ diskrete Werte je Längeneinheit repräsentiert. Die schnelle WT erzeugt auf der ersten Skale $N/2$ Waveletkoeffizienten (WK), auf der zweiten $N/4$ usw., (Abb. 1). Die Anzahlen der WK auf den Skalen folgen einer geometrischen Reihe und die Gesamtanzahl ist gleich der Partialsumme

$$\frac{N}{2} + \frac{N}{2^2} + \cdots + \frac{N}{2^n} = N(1 - \frac{1}{2^n}) = N - 1 \quad (2.1)$$

für $N = 2^n$. Auf der ersten Skale liegen also $N/2$ Werte und die WK auf den übrigen Skalen machen (bis auf einen) die zweite Hälfte aus. Im WB hat man die gleiche Werteanzahl wie im Originalbereich zu speichern (1D-WT ohne Kompression).

Analog verhält es sich im 2D-Fall. Der ebene Originalbereich sei quadratisch und mit N^2 diskreten Werten des 2D-Signals $f(x_1, x_2)$ besetzt. Die 2D-WT mit Tensorprodukt-Wavelets liefert nach dem ersten Zerlegungsschritt $3(N/2)^2$ Daten (Abb. 2). Im rechten oberen (linken unteren) Quadrat solche über waagerechte (senkrechte) Details im Signal $f(x_1, x_2)$ und im rechten unteren Quadrat diagonale Details. Im zweiten Schritt hat man nach dem gleichen Schema $3(N/4)^2$ Werte usw. – Die Anzahlen der WK folgen ebenfalls einer geometrischen Reihe mit der Partialsumme

$$\begin{aligned} 3\frac{N^2}{4} + 3\frac{N^2}{4^2} + \cdots + 3\frac{N^2}{4^n} \\ = N^2(1 - \frac{1}{2^{2n}}) = N^2 - 1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

für $N^2 = 2^{2n}$. Im WB sind wieder ebensoviele Werte wie im Originalbereich zu speichern (2D-WT ohne Kompression). Eine Datenkompression gelingt erst mittels Schwellwertbildung.

2.2 Schwellwertbildung im Waveletbereich

Sei $S(a)$ ein vorzugebender Schwellwert auf der Skale a (Abb. 3). Der Anteil $\lambda(a)$ derjenigen Koeffizienten $w_i(a)$ je Längeneinheit, die der Kompression anheimfallen, gleicht der Wahrscheinlichkeit dafür, dass die WK den Schwellwert betragsmäßig unterschreiten. Um $\lambda := P(-S < w < +S)$ für alle $a > 0$ ausrechnen zu können, muss die Verteilung der WK auf jeder Skale bekannt sein. Natürlich liegt die Normalverteilung nahe: Sind die Signalwerte normal, dann sind es wegen der Linearität der WT auch die WK. Wir betrachten nur solche Signale, deren WK auf jeder Skale eine vom Ort unabhängige Normalverteilung besitzen:

$$w \sim N(\bar{w}, \sigma_w^2), \quad (w - \bar{w})/\sigma_w \sim N(0, 1). \quad (2.3)$$

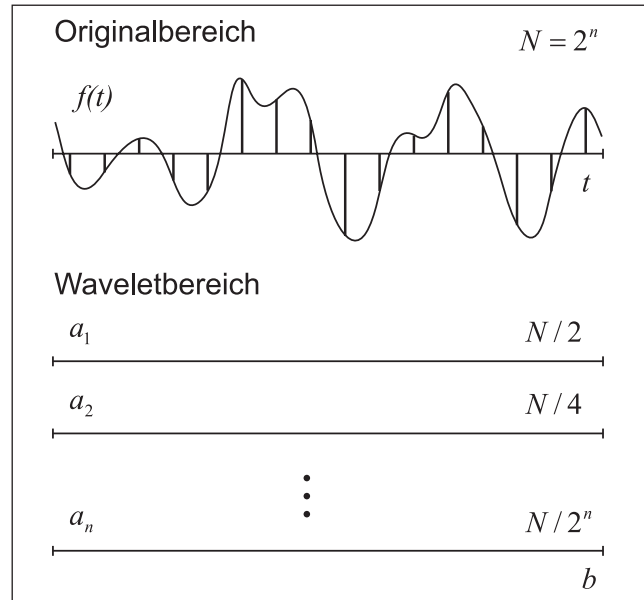


Abb. 1: Schnelle 1D-Wavelettransformation. Aus $N = 2^n$ Signalwerten je Längeneinheit im Originalbereich werden $N/2^n$ Waveletkoeffizienten auf der n -ten Skale erzeugt.

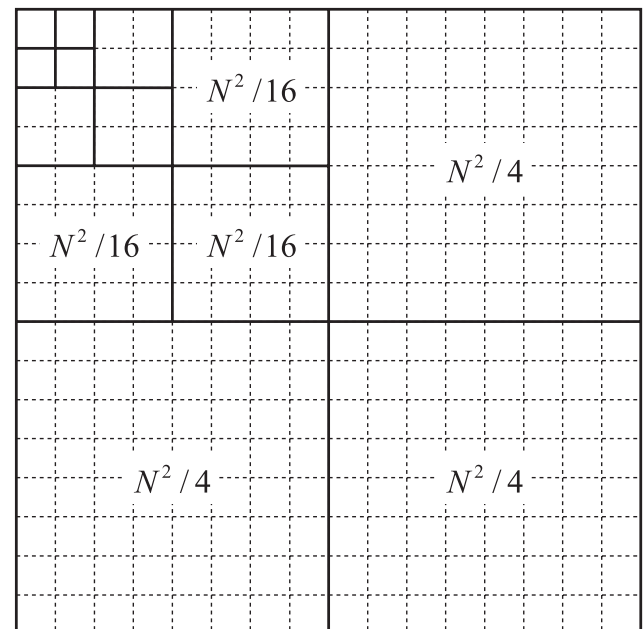


Abb. 2: Schnelle 2D-Wavelettransformation. Aus $N^2 = 2^{2n}$ Signalwerten je Flächeneinheit im Originalbereich werden $3N^2/2^{2n}$ Waveletkoeffizienten im n -ten Zerlegungsschritt erzeugt.

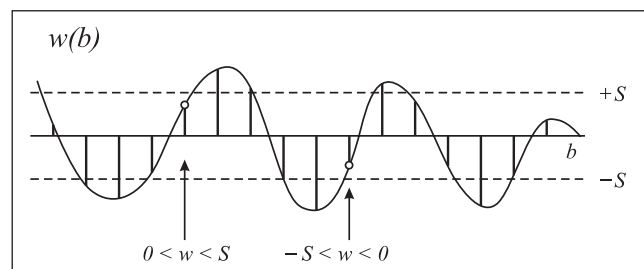


Abb. 3: Schwellwertbildung im Waveletbereich. Waveletkoeffizienten w , die den Schwellwert S betragsmäßig unterschreiten, werden auf Null gesetzt.

Ihre ersten und zweiten Momente werden im Abschnitt 3 angegeben. Hier schätzen wir vorerst

$$\begin{aligned}\lambda &= P(-S < w < +S) \\ &= P(g_1 < \frac{w - \bar{w}}{\sigma_w} < g_2) \\ &= F(g_2) - F(g_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{g_1}^{g_2} e^{-t^2/2} dt,\end{aligned}\quad (2.4)$$

wobei $F(g_1), F(g_2)$ die Verteilungsfunktion von $N(0,1)$ an den Stellen $g_1 = -(S + \bar{w})/\sigma_w$, $g_2 = (S - \bar{w})/\sigma_w$ ist.

Näherung für $(S \pm \bar{w}) \ll \sigma_w$:

$$\begin{aligned}F(g_2) - F(g_1) &\approx (g_2 - g_1)F'(0) \\ &= (g_2 - g_1)/\sqrt{2\pi},\end{aligned}$$

$$\boxed{\lambda \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{S}{\sigma_w}}. \quad (2.5)$$

2.3 Kompressionsraten

Kompressionsraten werden in der Literatur unterschiedlich definiert, bezüglich der WT in der Regel als Verhältnis der unkomprimierten zu den komprimierten Daten. Sei N die Anzahl der ursprünglichen Signalwerte bzw. der WK ohne Kompression und λ der Anteil der durch Schwellwertbildung wegfallenden WK, dann ist die K-Rate bezüglich der genannten Maßnahme mit Rücksicht auf (2.1)

$$\boxed{k = \frac{N}{N - N\lambda} = \frac{1}{1 - \lambda}, \quad \lambda = \sum_{k=1}^n 2^{-k} \lambda(a_k)}. \quad (2.6)$$

Die K-Rate (2.6) gilt sinngemäß auch im 2D-Fall: N ist durch N^2 , 2^{-k} durch 2^{-2k} zu ersetzen, und die Teilanzahlen sind über einen ebenen Bereich zu summieren.

Die totale Kompressionsrate K ist natürlich größer als k , denn es können im Zuge der Informationsverarbeitung noch weitere, im Abschnitt 1 angesprochene Maßnahmen ergriffen werden. Hier betrachten wir ausschließlich den Anteil k gemäß (2.6) mit $\lambda(a_k)$ entsprechend (2.4), (2.5), und wenden uns nun den darin enthaltenen kritischen Größen $\bar{w}$, σ_w , S zu.

3 Momente erster und zweiter Ordnung von Wavelettransformierten

3.1 Die eindimensionale Wavelettransformation als lineares Filter

Es wird die Notation von Louis et al. (1994) benutzt; insbesondere steht vor der Fourier-Hin- als auch vor der Fourier-Rücktransformation der Faktor $1/\sqrt{2\pi}$, so dass im Faltungprodukt der Faktor $\sqrt{2\pi}$ berücksichtigt werden muss.

Die WT des Signals $f(t)$ zum Wavelet ψ ,

$$L_\psi f(a, b) := \sqrt{\frac{1}{c_\psi |a|}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (3.1)$$

mit dem Skalenparameter a und dem Ortsparameter b , ferner dem Normierungsfaktor

$$c_\psi := 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega \quad (3.2)$$

mit $\hat{\psi}$ als Fouriertransformierte (FT) von ψ , ist vom Faltungstyp. Daher kann (3.1) als lineares Filter mit der Gewichtsfunktion ψ interpretiert werden. Die FT von $L_\psi f$ ist

$$\widehat{L_\psi f}(a, \omega) = \sqrt{\frac{2\pi|a|}{c_\psi}} \hat{\psi}(-a\omega) \hat{f}(\omega). \quad (3.3)$$

Daher ist die Durchlasscharakteristik

$$G(j\omega) = \sqrt{\frac{2\pi|a|}{c_\psi}} \hat{\psi}(-a\omega) \quad (3.4)$$

und die Übertragungsfunktion

$$U(\omega) = |G(j\omega)|^2 = \frac{2\pi a}{c_\psi} |\hat{\psi}(-a\omega)|^2. \quad (3.5)$$

Wegen $\hat{\psi}(0) = 0$ und $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \hat{\psi}(\omega) = 0$ ist dieses Filter ein Bandpass: Für jedes $a > 0$ liefert die WT (3.1) eine bandgefilterte Version des ursprünglichen Signals $f(t)$. Mit Hilfe dieser Eigenschaft können speziell die skalenabhängigen Varianzen $\sigma_w^2(a)$ von $L_\psi f(a, b) =: w(a, b)$, welche die K-Raten entsprechend (2.4) bis (2.6) mitbestimmen, berechnet werden.

3.2 Erwartungswertfunktionen

Sei $f(t)$ die Realisierung eines stochastischen Prozesses $F(t)$. Setzt man alle Realisierungen $f_i \subset F$ in (3.1) ein und bildet den Erwartungswert, ergibt sich

$$\begin{aligned}E\{w(a, b)\} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{c_\psi |a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} E\{F(t)\} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt,\end{aligned}\quad (3.6)$$

da Erwartungswertbildung und Integration als lineare Operationen vertauscht werden dürfen.

Sonderfall: F sei stationär mit $E\{F(t)\} =: \bar{F} = \text{const.}$ In diesem Fall kann $\bar{F}$ vor das Integral geschrieben werden, so dass (mit der Substitution $(t-b)/a =: x$)

$$E\{w(a)\} =: \bar{w}(a) = \sqrt{\frac{|a|}{c_\psi}} \bar{F} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx \equiv 0 \quad (3.7)$$

wegen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) dx = 0. \quad (3.8)$$

Somit gilt für stationäre Gauß-Prozesse die Schätzung (2.5).

3.3 Kovarianzfunktionen und Spektraldichten

Wird ein Signal f der WT (3.1) unterworfen, d. h. f mit dem Wavelet ψ gefaltet, und ist $C_{ff}(t', t'')$ die Autokovarianzfunktion (AKF) von f , dann erhält man die AKF $C_{ww}(b', b'')$ der Wavelettransformierten auf jeder Skale $a > 0$, indem man C_{ff} mit ψ zweimal faltet (vgl. z. B. Meier und Keller, 1990, S. 70-72):

$$C_{ww} \sim C_{ff} * \psi * \psi,$$

ausgeschrieben

$$C_{ww}(b', b''; a) = \frac{1}{c_\psi a} \int \int_{-\infty}^{+\infty} C_{ff}(t', t'') \cdot \psi\left(\frac{t' - b'}{a}\right) \psi\left(\frac{t'' - b''}{a}\right) dt' dt'' \quad (3.9)$$

Daraus ergibt sich die Varianzfunktion

$$\sigma_w^2(b; a) := C_{ww}(b, b; a). \quad (3.10)$$

Ist f (im weiteren Sinne) stationär mit $C_{ff} = C_{ff}(t'' - t')$, dann sind es auch die bandgefilterten Versionen mit

$$C_{ww} = C_{ww}(b'' - b'; a), \quad (3.11)$$

$$\sigma_w^2(a) = C_{ww}(0; a) = \text{const}$$

für jedes $a > 0$. Ferner existiert auf jeder Skale die FT von C_{ww} , die Spektraldichte

$$S_{ww}(\omega; a) = U(\omega; a) S_{ff}(\omega) \quad (3.12)$$

$$= \frac{2\pi a}{c_\psi} |\hat{\psi}(-a\omega)|^2 S_{ff}(\omega)$$

und die Varianz (3.10) erhält man auch als Integral über die Spektraldichte:

$$\sigma_w^2(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{ww}(\omega; a) d\omega \quad (3.13)$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{c_\psi} a \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(-a\omega)|^2 S_{ff}(\omega) d\omega.$$

In Anbetracht der Fülle unterschiedlicher Signalklassen und Wavelets folgt sofort, dass – bis auf wenige Ausnahmen – (3.10) bis (3.13) und damit $\sigma_w(a)$ in (2.3) bis (2.5) numerisch auszuwerten sind. Wenn das so ist, dann kann man f auch gleich in den WB transformieren und sich nach Vorgabe von Schwellwerten die K-Raten anzeigen lassen! Immerhin sind gewisse qualitative Schlüsse und die Apriori-Schätzung von Schwellwerten möglich.

3.4 Varianzen und Schwellwerte

Nach einer Signalklassifikation von Schlitt (1968), vom weißen Rauschen mit vollständig unkorrelierten Signalwerten bis hin zum streng vorhersagbaren periodischen Signal, wurden stationäre Modellprozesse bezüglich ihres Schwankungsverhaltens im WB, vorzugsweise mit (3.13)

untersucht (Tabelle 1), teils für beliebige Wavelets, teils mit dem Wavelet

$$\psi(x) = -\sqrt{\frac{8}{\pi}} x e^{-x^2}, \quad (3.14)$$

welches der 1. Ableitung des Gaußschen Hutes proportional ist (in Tabelle 1 als Standard-Wavelet bezeichnet).

Beim weißen Rauschen ist σ_w^2 eine skalenunabhängige Konstante; sie hängt lediglich von der Form des Wavelets ab. Die Integrale über $|\hat{\psi}|^2$ und über ψ^2 sind (nach einem Theorem von Parseval über aperiodische Funktionen) identisch und entsprechen dem Normquadrat des Wavelets. Dieses Modell motiviert die Wahl *skalenunabhängiger* Schwellwerte $S(a) = S = \text{const}$. Es ist zweckmäßig, S so zu wählen, dass Defekte, die im Zuge der Rücktransformation mit komprimierten WK entstehen, in den Grenzen der (mehr oder weniger korrelierten) Erfassungsfehler der Signale bleiben. Da beim additiven Rauschen die Fehler genauso wie die Signale transformiert werden, setze man nach dem Modell des weißen Rauschens (Tabelle 1)

$$S = \gamma m_w = \gamma m_f \|\psi\| / \sqrt{c_\psi} \quad (3.15)$$

mit $0 < \gamma < 1$.

Anstelle σ steht (in Anlehnung an den mittleren quadratischen Fehler) das Symbol m , um zwischen Standardabweichungen bezüglich des Signals (σ_f, σ_w) und des Rauschens (m_f, m_w) zu unterscheiden. Der Schwellwert (3.15) gilt für die *stetige* WT. Diskret wird vorzugsweise mit normierten Wavelets, $\|\psi\| / \sqrt{c_\psi} = 1$, gerechnet, so dass man mit

$$S = \gamma m_f, \quad 0 < \gamma < 1 \quad (3.16)$$

den Schwellwert sehr einfach mit Hilfe der Fehlerstandardabweichung m_f festlegen kann, und zwar auch dann noch, wenn die Fehler (schwach) korreliert sind, weil $\sigma_w^2(a)$, hier identisch mit $m_f^2(a)$, mit wachsendem a gegen konstante Werte streben (Abb. 4, Kurven 2, 3). Lediglich periodische Fehler sind davon ausgenommen (Abb. 4, Kurve 4).

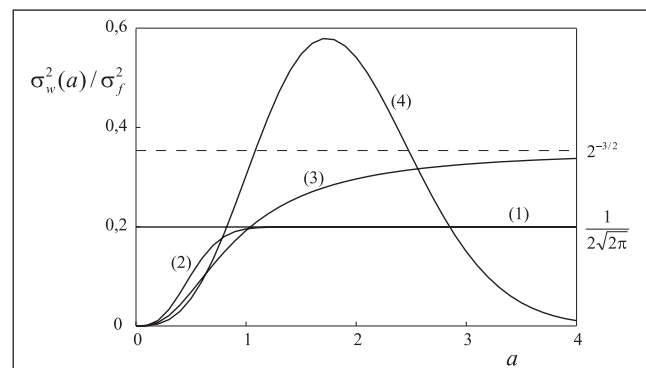


Abb. 4: Skalenabhängige Varianz $\sigma_w^2(a)$, bezogen auf die Varianz des stationären Eingangssignals für vier Signalklassen lt. Tabelle 1: (1) weißes Rauschen, (2) Breitbandrauschen mit $\omega_g = \pi$, (3) geformtes Rauschen mit $d = 1$, (4) periodisches Signal mit $\omega_0 = 1$.

Modell	AKF (Eingang) $C_{ff}(\tau)/\sigma_f^2$	Spektraldichte $S_{ff}(\omega)/\sigma_f^2$	Skalenabhängige Varianz $\sigma_w^2(a)/\sigma_f^2$	Wavelet
Weißes Rauschen	$\delta(\tau)$ $(-\infty < \tau < +\infty)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \text{const}$ $(-\infty < \omega < +\infty)$	$\frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(\omega) ^2 d\omega$ $= \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} [\psi(x)]^2 dx =: \ \psi\ ^2 / c_\psi = \text{const}$ $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}$	beliebig Standard-wavelet
Breitband- rauschen	$\frac{\sin \omega_g \tau}{\omega_g \tau}$ $(-\infty < \tau < +\infty)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\pi}{\omega_g} = \text{const}$ $(-\omega_g < \omega < +\omega_g)$	$\frac{1}{c_\psi} \int_{-\omega_g}^{+\omega_g} \hat{\psi}(\omega) ^2 d\omega$ $\frac{1}{2\omega_g} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Phi(a\omega_g) - a\omega_g e^{-(a\omega_g)^2/2} \right\}$	beliebig Standard-wavelet
Geformtes Rauschen	$e^{-\tau^2/d^2}$ $(d > 0)$	$\frac{\sqrt{2}}{2} d e^{-(\omega d)^2/4}$	$\frac{d}{[2 + (d/a)^2]^{3/2}}$	Standard-wavelet
Schmal- band- rauschen	$e^{-\tau^2/d^2} e^{j\omega_0 \tau}$ $(d > 0, \omega_0 > 0, j^2 = -1)$	$\frac{\sqrt{2}}{4} d [e_1(\omega) + e_2(\omega)]$ $e_{1,2}(\omega) := \exp[-(\omega \pm \omega_0)^2 d^2/4]$	$\frac{d}{[2 + (d/a)^2]^{3/2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2 d^4}{2a^2 + d^2} \right] \cdot \exp \left[\frac{1}{4} \frac{\omega_0^2 d^4}{2a^2 + d^2} - \omega_0^2 d^2 \right]$	Standard-wavelet
Periodisches Signal	$e^{j\omega_0 \tau}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta(\omega - \omega_0)$	$U(a; \omega_0) = \frac{2\pi a}{c_\psi} \hat{\psi}(-a\omega_0) ^2$ $\frac{a}{2} (a\omega_0)^2 e^{-(a\omega_0)^2/2}$	beliebig Standard-wavelet

Tab. 1: Zweite Momente stationärer Prozessmodelle, jeweils bezogen auf die Varianz σ_f^2 des Eingangsprozesses. δ bezeichnet die Deltafunktion, ψ das Wavelet, $\hat{\psi}$ seine Fouriertransformierte, Φ das Wahrscheinlichkeitsintegral, ω_g die Bandbegrenzung, U die Übertragungsfunktion der 1D-WT. Weitere Erläuterungen im Text.

3.5 Standardabweichungen und Kompressionsraten

Mit zunehmender Strukturierung der Signale (in Tabelle 1 von oben nach unten) prägt sich die Skalenabhängigkeit von $\sigma_w^2(a)$ mit entsprechendem Einfluss auf die K-Raten immer stärker aus (Abb. 4). Als ein typisches Beispiel betrachten wir das geformte Rauschen in Tabelle 1 und in Abb. 4 (Kurve 3). Für große Korrelationslängen ($\sim d$) und auf niederen Skalen, $d/a \gg 1$, wird

$$\frac{1}{\sigma_w(a)} \approx \frac{d}{\sigma_f} a^{-3/2}, \quad (3.17)$$

d. h. mit Blick auf (2.5): Die K-Raten nehmen mit wachsender Korrelationslänge unter sonst gleichen Verhältnissen zu.

In der digitalen Verarbeitung von Bildern kann der langwellige Hintergrund mit großen d ohne wesentliche Störung der strukturierten Vordergrundinformation verändert, also stark komprimiert werden; man erzielt K-Raten bis zur Größenordnung 100! Sobald man allerdings von der reinen Bildbetrachtung zur metrischen Information übergeht, z. B. in der digitalen Photogrammetrie, wo Punktlagefehler im Subpixelbereich bleiben

sollen, sinken die K-Raten unter 10 (Kiefner and Hahn 2000, Kiefner 2001). Auch die WT von bereits generierten DHM mit großer Gitterweite liefert kleine K-Raten (vgl. Abschnitt 4.4), denn der langwellige Anteil repräsentiert hier gerade die Großformen, die durch Kompression nicht wesentlich gestört werden dürfen! Deshalb müssen die Schwellwerte genügend klein sein mit der Konsequenz ebenfalls kleiner K-Raten. Die Näherung (3.17) lässt sich auch noch anders deuten. Das benutzte Wavelet (3.14) ist von 1. Ordnung mit der Eigenschaft, dass die WT für $a \rightarrow 0$ die erste Ableitung $f'(t)$ des Eingangssignals $f(t)$ approximiert. Nun ist im stationären Fall

$$\sigma_{f'}^2 = -C''_{ff}(0) = 2\sigma_f^2/d^2, \quad \text{mithin} \\ \frac{1}{\sigma_w} \approx \frac{1}{\sigma_{f'}} \sim \frac{d}{\sigma_f} \quad \text{für sehr kleine } a,$$

d. h. die K-Raten hängen von der Änderungsgeschwindigkeit $f'(t)$ mit Standardabweichung $\sigma_{f'}$ ab, wobei letztere durch die Parameter σ_f und d des Eingangssignals ausgedrückt werden kann. Die sog. Approximationseigenschaften von Wavelets erster (allgemein n -ter) Ordnung können deshalb in gewissem Maße zur Apriori-Schätzung von K-Raten ausgenutzt werden.

4 Kompression mit Wavelets endlicher Ordnung

4.1 Varianzen und Schwellwerte bei diskreter Transformation

Anstelle der stetigen WT (3.1), Skalarprodukt $\langle f, \psi \rangle$, berechnet man mit der diskreten WT die Skalarprodukte $\underline{w} = \underline{\psi}^\top \underline{f}$. Nach der bekannten Regel der Varianzfortpflanzung linear transformierter Vektoren erhält man sofort die Varianzen

$$\sigma_w^2 = \underline{\psi}^\top \underline{C}_{ff} \underline{\psi} \quad (4.1)$$

auf jeder beliebigen Skale. Diese werden von Anzahl, Betrag und Vorzeichen der Filterkoeffizienten und von den Elementen der Signal-Kovarianzmatrix $\underline{C}_{ff}$ bestimmt. Man könnte also – mit Blick auf die K-Raten der diskreten WT – auf die stetige Rechnung im Abschnitt 3 verzichten. Trotzdem wurde letztere in den Text aufgenommen, weil man aus der Rechnung mit AKF-Modellen (Tab. 1, Abb. 4) qualitativ mehr ersieht als aus der Transformation von Kovarianzmatrizen: Mit Ausnahme von Wavelets mit zwei Koeffizienten (Prototyp Haar-Wavelet) nimmt die Anzahl der Filterkoeffizienten und damit der Umfang der Kovarianzmatrizen von Skale zu Skale zu. Die Berechnung der Varianzen $\sigma_w^2(a_k)$ der Kompressionsanteile $\lambda(a_k)$ und ihrer Summe über n Skalen gemäß (2.6) wird rasch unübersichtlich und ist – in Anbetracht der ohnehin einschränkenden Voraussetzungen wie Normalität und Stationarität der Signale – wenig hilfreich. Mit

Ausnahme des Haar-Wavelets (Beispiel 1 im Abschnitt 4.2) beschränken wir uns auf die Parameter $\sigma_w^2(a_1)$, $\lambda(a_1)$ der ersten Skale a_1 , welche das typische Verhalten der K-Raten hinlänglich zeigen.

Mit Hilfe von (4.1) gewinnt man auch sofort einen skalenunabhängigen Schwellwert analog (3.16):

$$\underline{C}_{ff} = m_f^2 \underline{I}, \quad m_w^2 = m_f^2 \underline{\psi}^\top \underline{\psi} = m_g^2 \|\underline{\psi}\|^2, \\ S = \gamma m_w = \gamma m_f \|\underline{\psi}\|, \quad (4.2)$$

identisch mit (3.16) für Wavelets mit $\|\underline{\psi}\| = 1$. Schließlich sei noch bemerkt, dass die nachfolgend angegebenen Formeln für Kompressionsanteile auch im 2D-Fall gelten, wenn mit dem Vektor $\underline{\psi}$ gehörenden Tensorprodukt-Wavelets komprimiert wird (vgl. z. B. Beyer, 2002b).

4.2 Kompression mit Wavelets erster Ordnung

Unter Wavelets 1. Ordnung versteht man solche, deren 1. Moment μ_1 nicht verschwindet. Sie approximieren $f'(t)$ im Grenzübergang $a \rightarrow 0$. Diskrete Wavelets 1. Ordnung liefern WK, die den 1. Differenzen Δf bzw. den Differenzenquotienten $\Delta f / \Delta t$ proportional sind. Die momentenabhängigen Proportionalitätsfaktoren für Wavelets 1., 2., ..., n -ter Ordnung wurden von Beyer und Meier (2001) hergeleitet. Für Wavelets 1. Ordnung gilt

$$w / \mu_1 = \Delta f \quad (4.3)$$

auf jeder Skale $a > 0$. Mit zunehmendem a ($a_1 = 1$, $a_2 = 2$, ..., $a_k = 2^{k-1}$, ...) erhält man Δf über immer größere Punktabstände (Δt , $2\Delta t$, ..., $k\Delta t$, ...). Wendet man nun auf (4.3) die Regeln der Varianz-Fortpflanzung an, ergeben sich die Signalvarianz

$$\sigma_w^2 = \mu_1^2 \sigma_{\Delta f}^2 = 2\mu_1^2 \sigma_f^2 (1 - \rho) \quad (4.4)$$

mit dem Korrelationskoeffizienten ρ benachbarter Werte (Nachbarschaftskorrelation) und die Fehlervarianz

$$m_w^2 = 2\mu_1^2 m_f^2 \quad (4.5)$$

bei unkorrelierten Erfassungsfehlern. Schließlich folgt mit (4.5) ein konstanter Schwellwert

$$S = \gamma m_w = \sqrt{2} \gamma |\mu_1| m_f. \quad (4.6)$$

Beispiel 1: Haar-Wavelet als Differenzenfilter mit Filterkoeffizienten

$$\frac{\sqrt{2}}{2} [1, -1] \quad \text{und} \quad \mu_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Sowohl aus (4.4) als auch aus (4.1) folgt $\sigma_w^2 / \sigma_f^2 = 1 - \rho$, wobei $\rho = \rho(\Delta t)$, $\rho(2\Delta t)$, ..., $\rho(2^{k-1}\Delta t)$, ..., auf den Skalen $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$, ferner aus (4.6) oder (4.2) der

Schwellwert $S = \gamma m_f$, schließlich aus (2.5) und (2.6) der Kompressionsanteil auf der ersten Skale

$$\lambda(a_1) \approx \frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \frac{m_f}{\sigma_f} \frac{1}{\sqrt{1 - \rho(\Delta t)}} \quad (4.7)$$

und summiert über n Skalen

$$\lambda \approx \frac{2\gamma}{\sqrt{2\pi}} \frac{m_f}{\sigma_f} \sum_{k=1}^n \frac{2^{-k}}{\sqrt{1 - \rho(2^{k-1}\Delta t)}}. \quad (4.8)$$

Wie man sieht, ist λ eine Funktion des Signal-Rausch-Verhältnisses (SRV),

$$\lambda \sim 1/\sqrt{\text{SRV}}, \quad \text{SRV} := \sigma_f^2/m_f^2,$$

und der Folge von Korrelationskoeffizienten $\{\rho(2^{k-1}\Delta t); k = 1, 2, \dots, n\}$. Für den Sonderfall des geformten Rauschens mit AKF vom Gauß-Typ (Tabelle 1) können letztere durch genau einen Koeffizienten, die Nachbarschaftskorrelation $\rho_1 := \rho(\Delta t)$ ersetzt werden: $\rho(2^{k-1}\Delta t) = \rho_1^{2^{k-1}}$.

Abb. 5 zeigt die Abhängigkeit der Größen $\lambda(a_1)$ und λ sowie $\lambda/\lambda(a_1)$ von ρ_1 : über einen weiten Bereich von ρ_1 ändern sich $\lambda(a_1)$ und λ nur wenig; erst für große ρ_1 nimmt die Kompression stark zu. Die Grenzfälle $\rho_1 = 0$ und $\rho_1 = 1$ sind an realen Signalen ausgeschlossen. Immerhin erkennt man an den Grenzwerten

$$\frac{\lambda}{\lambda(a_1)} \approx \begin{cases} 2 & \text{für } \rho_1 \rightarrow 0 \\ 4/3 & \text{für } \rho_1 \rightarrow 1 \end{cases},$$

dass die Kompression von glatten Signalen zu fast drei Viertel auf der niedersten Skale stattfindet; an stark strukturierten Signalen (kleine ρ_1) beträgt dieser Anteil noch mindestens die Hälfte.

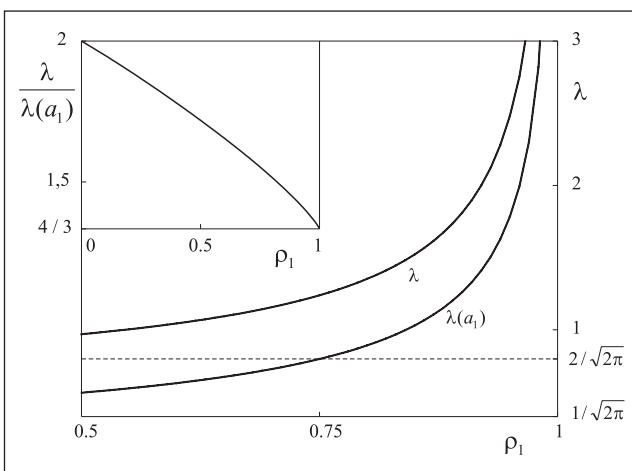


Abb. 5: Kompressionsanteil $\lambda(a_1)$ auf der ersten Skale a_1 nach (4.7) und Summe λ über n Skalen ($n \gg 1$) nach (4.8) für das Haar-Wavelet (Daub-2), als Funktion der Nachbarschaftskorrelation ρ_1 und bezogen auf $\gamma m_f/\sigma_f$. Verhältnis $\lambda/\lambda(a_1)$ oben links. Diskussion im Abschnitt 4.2.

4.3 Kompression mit Wavelets zweiter Ordnung

Unter Wavelets 2. Ordnung versteht man solche, deren 1. Moment $\mu_1 = 0$ und deren 2. Moment $\mu_2 \neq 0$ ist. Sie approximieren $f''(t)$ durch Grenzübergang $a \rightarrow 0$. Diskrete Wavelets 2. Ordnung liefern WK, die den zweiten Differenzen $\Delta^2 f$ bzw. den Differenzenquotienten $\Delta^2 f/\Delta t^2$ proportional sind. Es gilt

$$2w/\mu_2 = \Delta^2 f, \quad \sigma_w^2 = \mu_2^2 \sigma_{\Delta^2 f}^2/4. \quad (4.9)$$

Die Varianz der 2. Differenzen aus drei korrelierten Werten ist

$$\sigma_{\Delta^2 f}^2 = 2\sigma_f^2[3 - 4\rho(\Delta t) + \rho(2\Delta t)], \quad (4.10)$$

daher

$$\sigma_w^2 = \mu_2^2 \sigma_f^2[3 - 4\rho(\Delta t) + \rho(2\Delta t)]/2, \quad (4.11)$$

$$m_w^2 = 3\mu_2^2 m_f^2/2, \quad (4.12)$$

$$S = \gamma m_w = \sqrt{3/2} |\mu_2| m_f. \quad (4.13)$$

Beispiel 2: Biorthogonales Wavelet als zweifaches Differenzenfilter mit Filterkoeffizienten

$$-\frac{\sqrt{6}}{6}[1, -2, 1] \quad \text{und} \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

(entnommen aus Wickerhauser (1996), S. 418 und normiert auf $\|\underline{\psi}\| = 1$).

Sowohl aus (4.11) als auch aus (4.1) folgt das in Tab. 2 angegebene Varianzverhältnis $\sigma_w^2(a_1)/\sigma_f^2$, ferner aus (4.13) oder (4.2) wieder $S = \gamma m_f$, schließlich mit (2.5) der in Tab. 2 stehende Kompressionsanteil $\lambda(a_1)$.

Tabelle 2 enthält zwei weitere Beispiele von Wavelets 2. Ordnung. Das als Kombi-Haar bezeichnete ist die Differenz zweier Haar-Wavelets, wobei das zweite gegen das erste um Δt verschoben ist; es entspricht der auf $\|\underline{\psi}\| = 1$ normierten Differenz zweier 1. Differenzen. Kombi-Haar approximiert ebenso wie Daub-4 die 2. Ableitung aus vier Werten! Mithin gehen in $\sigma_w^2(a_1)$ drei Korrelationskoeffizienten bzw. $\underline{C}_{ff}$ vom Umfang 4×4 ein. Daher können sowohl $\sigma_w^2(a_1)$ als auch m_w^2 und S nicht mehr über (4.11) bis (4.13) berechnet werden, sondern man muss auf die allgemeineren Regeln (4.1), (4.2) zurückgreifen. Die Ergebnisse stehen in Tabelle 2.

4.4 Vergleiche von Kompressionsraten

Wavelets endlicher Ordnung komprimieren (theoretisch) umso stärker, je mehr sie verschwindende Momente besitzen, d. h. mit zunehmender Ordnung. Diesen Sachverhalt veranschaulicht Abb. 6. Die Kompressionsunterschiede machen sich allerdings erst auf großen ρ_1 d. h. an glatten Signalen bemerkbar (vgl. hierzu das folgende Beispiel 3, Tab. 3). Mit abnehmendem ρ_1 laufen die Kurven $\lambda(\rho_1)$ zusammen: $\lambda(\rho_1) \rightarrow 1/\sqrt{2\pi} \approx 0,40$ für $\rho_1 \rightarrow 0$.

Wavelet	Filterkoeffizienten	Varianzverhältnis $\sigma_w^2(a_1)/\sigma_f^2$	Kompressionsanteil $\lambda(a_1)$
Biorthogonales Wavelet	$-\frac{\sqrt{6}}{6}[1, -2, 1]$	$1 - \frac{4}{3}\rho(\Delta t) + \frac{1}{3}\rho(2\Delta t)$	$\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \frac{m_f}{\sigma_f} \left[1 - \frac{4}{3}\rho(\Delta t) + \frac{1}{3}\rho(2\Delta t) \right]^{-1/2}$
Kombi-Haar	$\frac{1}{2}[1, -1, -1, 1]$	$1 - \frac{1}{2}\rho(\Delta t) - \rho(2\Delta t) + \frac{1}{2}\rho(3\Delta t)$	$\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \frac{m_f}{\sigma_f} \left[1 - \frac{1}{2}\rho(\Delta t) - \rho(2\Delta t) + \frac{1}{2}\rho(3\Delta t) \right]^{-1/2}$
Daub-4	$\frac{\sqrt{2}}{8}[1 - \sqrt{3}, -3 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}]$	$1 - \frac{9}{8}\rho(\Delta t) + \frac{1}{8}\rho(3\Delta t)$	$\frac{\gamma}{\sqrt{2\pi}} \frac{m_f}{\sigma_f} \left[1 - \frac{9}{8}\rho(\Delta t) + \frac{1}{8}\rho(3\Delta t) \right]^{-1/2}$

Tab. 2: Varianzen $\sigma_w^2(a_1)$, bezogen auf die Varianz σ_f^2 des stationären Eingangssignals $f(t)$, und Kompressionsanteile $\lambda(a_1)$ auf der ersten Skala a_1 für drei Wavelets 2. Ordnung. Weitere Erläuterungen im Text.

DHM	Relieftyp	$\hat{\sigma}_h$ in m	$\hat{m}_h$ in m	$\hat{\rho}_1$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	$\hat{\lambda}_3$	$\hat{\lambda}_4$	$\hat{k}_1$	$\hat{k}_2$	$\hat{k}_3$	$\hat{k}_4$
Sternberg	Jungglaziale Moräne	8,0	0,5	0,976	0,16	0,31	0,50	0,74	1,2	1,4	2,0	3,8
Tharandt	Bergland	30	3,3	0,953	0,20	0,29	0,46	0,67	1,2	1,4	1,9	3,0
Harz	Bergland	23	1,7	0,975	0,19	0,35	0,57	0,84	1,2	1,6	2,3	6,3

Tab. 3: Digitale Höhenmodelle (DHM). Geschätzte Eingangsdaten und Kompressionsanteile auf der ersten Skala für Schwellwert $S = \hat{m}_h$. Indizes: 1 (Daub-2 = Haar), 2 (Kombi-Haar), 3 (Daub-4), 4 (Biorthogonales Wavelet). Diskussion im Abschnitt 4.4.

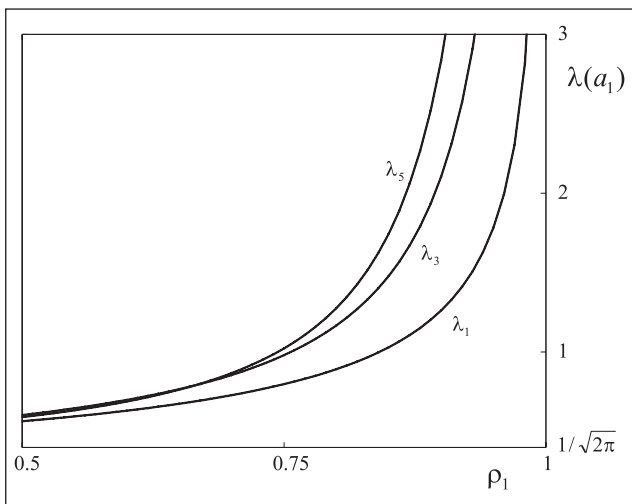


Abb. 6: Kompressionsanteile $\lambda(a_1)$ auf der ersten Skala a_1 für drei Daubechies-Wavelets ($\lambda_{1,3,5}$ für Daub-2,4,6 der Ordnung 1,2,3) als Funktion der Nachbarschaftskorrelation ρ_1 und bezogen auf $\gamma m_f/\sigma_f$. Diskussion im Abschnitt 4.4.

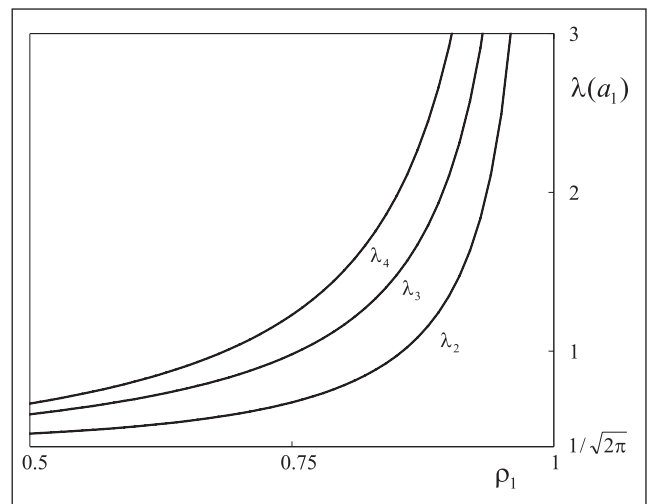


Abb. 7: Kompressionsanteile $\lambda(a_1)$ auf der ersten Skala a_1 für drei Wavelets 2. Ordnung nach Tabelle 2 (λ_2 für Kombi-Haar, λ_3 für Daub-4, λ_4 für das biorthogonale Wavelet) als Funktion der Nachbarschaftskorrelation ρ_1 und bezogen auf $\gamma m_f/\sigma_f$. Diskussion im Abschnitt 4.4.

Dies mag der Grund dafür sein, dass sich an stärker strukturierten Signalen mit kleinen bis mittleren ρ_1 experimentell via diskreter WT mit verschiedenen Wavelets ermittelte K-Raten kaum deutlich unterscheiden; *der Einfluss der Signaleigenschaften überwiegt!*

Gleiches Kompressionsverhalten wie die Vertreter der Daubechies-Reihe *ungleicher* Ordnung (Abb. 6) zeigen auch verschiedene Wavelets der *gleichen* Ordnung (Abb. 7): Obwohl die drei Wavelets von 2. Ordnung sind, gibt es deutliche Kompressionsunterschiede auf großen ρ_1 , verursacht von unterschiedlichen Filterkoeffizienten (vgl. Tab. 2). Um eine Vorstellung von der Größenordnung der K-Raten an glatten Signalen zu bekommen, folgen noch numerische Beispiele.

Beispiel 3: Digitale Höhenmodelle (DHM). Kompressionsanteile auf der ersten Skale.

Die in Tabelle 3 aufgeführten DHM wurden aus Höhenlinien topographischer Karten unterschiedlichen Maßstabs und unterschiedlicher Schichthöhe interpoliert. Die Eingangsgrößen $\hat{\sigma}_h$, $\hat{\rho}_1$ sind Arbeiten von Borkowski (1994) und Fuchs (1994) entnommen, $\hat{m}_h$ wurde mit Hilfe der bekannten Koppeschen Formel geschätzt. Voraussetzungen wie normalverteilte Höhenwerte, Homogenität und lokal-isotrope Signal-AKF vom Gauß-Typ sind annähernd erfüllt.

Die totalen K-Raten (über n Skalen) sind einerseits größer als die auf der ersten Skale in Tabelle 3, z. B. $\hat{\lambda}_1$ etwa um den Faktor $4/3$ wegen $\hat{\rho}_1$ nahe Eins (vgl. Abb. 5). Andererseits wird sich mit Schwellwerten $S < \hat{m}_h$ kaum etwas an der *Größenordnung* der $\hat{\lambda}_i$, $\hat{k}_i$ in Tab. 3 ändern.

Hier lohnt die (geringe) Kompression, verbunden mit der Notwendigkeit, die Daten zwecks kompakter Speicherung umzuorganisieren, eher nicht!

Die im Beispiel 3 genannten Voraussetzungen sind in der Praxis selten erfüllt. Tests an nicht-normalen, inhomogenen Datensätzen zeitigen zwar allgemein die gleiche Größenordnung der K-Raten wie in Tabelle 3, jedoch deutliche Unterschiede im Einzelfall (Beyer, 2002b). Um letztere zu klären, muss man die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von Wavelettransformierten nicht-normaler Signale und die Auswirkungen von Inhomogenitäten untersuchen. Eine solcherart erweiterte Modellbildung braucht ihren Platz und soll daher einer gesonderten Arbeit vorbehalten bleiben.

5 Schlussbemerkungen

Die Untersuchungen über K-Raten mit statistischen Hilfsmitteln wurde im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Projekts über »Reliefbearbeitung im Waveletbereich« unternommen. Es sollte schlüssig begründet werden, dass und warum die K-Rate *kein* entscheidendes Kriterium bei der Wavelet-Wahl ist, wenn man real existierende DGM, aus welchen Gründen auch immer, in den WB transformiert; daher die numerischen DHM-Beispiele im letzten Abschnitt.

Obwohl von vornherein klar war, dass wegen der Vielschichtigkeit der K-Frage im Allgemeinen nur qualitative Antworten (quantitative nur unter einschränkenden Voraussetzungen, speziell für Signale als Realisierungen stationärer Gauß-Prozesse) gegeben werden können, gewinnt man doch via Modellbildung Einblicke in Übertragungsmechanismus und -wirkungen der WT, die mit rein empirischen Experimenten mittels Wavelet-Software, so wichtig diese auch sind, versagt bleiben. Das betrifft besonders die Einflüsse des Signal-Rausch-Verhältnisses und der Signalkorrelationen auf K-Raten, ferner die vorab festzulegenden Schwellwerte. Der Verfasser konnte dabei von den geometrischen und algorithmischen Kenntnissen des Projektbearbeiters Dr. rer. nat. G. Beyer und seinem experimentellen Fundus profitieren. Herr Beyer hat auch das Manuskript mit verbessert und bis zur Druckreife sorgfältig gestaltet. Prof. W. Keller, Stuttgart, gab nach kritischer Durchsicht des ersten Textentwurfs hilfreiche Hinweise. Dr.-Ing. A. Borkowski, Wrocław, hat numerische Rechnungen übernommen. Allen genannten Herren sagt der Verfasser seinen verbindlichsten Dank.

Literatur

- Antoniadis, A., Oppenheim, G., eds.: Wavelets and Statistics. Lecture Notes in Statistics, vol. 103, Springer-Verlag, New York, 1995.
- Beyer, G., Meier, S.: Geländeneigung und -wölbung aus Waveletkoeffizienten. Approximationsformeln für Profile. Z. f. Vermessungswesen 126, 1, 23–33, 2001.
- Beyer, G.: Terrain Inclination and Curvature from Wavelet Coefficients. Approximation Formulae for the Relief. J. of Geodesy (reviewed), 2002a.
- Beyer, G.: Wavelettransformation hybrider Geländemodelle. Habilitationsschrift TU Dresden, 2002b.
- Borkowski, A.: Stochastisch-geometrische Beschreibung, Filterung und Präsentation des Reliefs. DGK, Reihe C, 431, München, 1994.
- Fuchs, F.: Ordinatenstatistik im digitalen Höhenmodell. Diplomarbeit TU Dresden, 1994.
- Hahn, M., Kiefner, M.: Image Compression and Matching Accuracy. Internat. Arch. of Photogr. and Remote Sensing, vol. 32, part 3/1, 444–451, 1998.
- Kiefner, M., Hahn, M.: Image Compression versus Matching Accuracy. Internat. Arch. of Photogr. and Remote Sensing, vol. 33, part B2, 316–323, 2000.
- Kiefner, M.: Einfluß von Bildkompressionsverfahren auf die Qualität der digitalen Punktübertragung. DGK, Reihe C, 531, München, 2001.
- Louis, A. K., Maas, P., Rieder, A.: Wavelets. Theorie und Anwendungen. B. G. Teubner, Stuttgart, 1994.
- Meier, S., Keller, W.: Geostatistik. Einführung in die Theorie der Zufallsprozesse. Akademie-Verlag, Berlin, 1990.
- Schlitt, H.: Stochastische Vorgänge in linearen und nichtlinearen Regelkreisen. VEB Verlag Technik, Berlin, 1968.
- Wickerhauser, M. V.: Adaptive Wavelet-Analysis. Theorie und Software. Friedrich Vieweg & Sohn Verl.-Ges. mbH, Braunschweig, Wiesbaden, 1966.
- Zettler, W., Huffman, J., Linden, D. C. P.: Application of compactly supported wavelets to image compression. AWARE Techn. Report AD900119, 1990.

Anschrift des Autors

Prof. Dr.-Ing. habil. Siegfried Meier
Technische Universität Dresden, Institut für Planetare Geodäsie
01062 Dresden
Tel./Fax: 0351-463-33416/37063
meier@ipg.geo.tu-dresden.de