

# Zur Theorie und Praxis herkömmlicher Cäsiumatomuhren

Klaus Börger

## Zusammenfassung

Das Phänomen und damit die physikalische Größe »Zeit« erscheint auf den ersten Blick trivial im Sinne von alltäglich. Denn Zeit ist allgegenwärtig und strukturiert sämtliche Abläufe des Lebens. Gleichermaßen ist die Bedeutung der Zeit im technischen Bereich, in dem viele Verfahrensweisen zeitabhängige Elemente implizieren, so dass die Zeitmessung eine unbedingt notwendige Aufgabe darstellt. Im Gegensatz zu den eingangs erwähnten »Anwendungen des täglichen Lebens« fordern die technischen Methoden hohe Ansprüche an die Genauigkeit der Zeit- und Frequenzmessung. Auch bei vielen geodätischen Applikationen, sowohl bei terrestrischen Verfahren als auch bei den geodätischen Raumverfahren, ist Zeit ein eminenter Faktor, wobei sich die diesbezüglichen Aufgabenstellungen mit Zeitsynchronisation, Zeitpunktbestimmung, Zeitintervallmessung, Frequenz- und Phasenmessung angeben lassen. Als Beispiele seien genannt die Navigation und damit verbunden Messungen mit Hybridsystemen, die Elektrooptische Distanzmessung, Laserentfernungsmessungen, Schweremessungen, radiointerferometrische Messungen sowie Phasenmessungen von GNSS-Signalen. Notwendig gehört zum Umgang mit der Zeit ein »Zeitmodell«, das heißt die Definition einer Zeitskala, als auch die Realisierung bzw. Messung der Zeit. Der vorliegende Artikel behandelt ausschließlich die konventionellen, atomaren Beobachtungsinstrumente der Zeitmessung und vermittelt einen Einblick in die Prinzipien und in die Funktionsweise von Atomuhren.

## Summary

*Being an everyday occurrence, the phenomenon respectively the physical quantity »time« seems to be trivial. Time is ever present in our lives and helps us to structure these. In technical fields the importance of time is equally great, because there are a lot of time dependent procedures. In contrast to everyday requirements technical methods need to be highly precise. For many geodetic applications, time is an eminent factor, concerning not only space geodetic but also terrestrial methods. There are tasks like synchronization of time, determination of time, measurements of time-intervals, frequency and phase. Examples for this are navigation where hybrid systems have to be combined, measurements of distance, gravimetric measurements, radiointerferometric measurements and phase-measurements using GNSS. Dealing with time needs a »model of time«, i. e. a definition of a timescale as well as the realization of time. This article merely presents conventional atomic devices of time measurement and gives an idea of the principles and function of atomic clocks.*

## 1 Theoretische Grundlagen von Atomuhren

### 1.1 Mechanische und magnetische Eigenschaften der Elementarteilchen

Die kleinste Einheit der Materie bildet nach allgemeinem Verständnis das Atom, das aus einem Kern und der Elektronenhülle besteht. Das grundlegende Funktionsprinzip von Cäsiumatomuhren, die so genannte Atomstrahlresonanzmethode, stützt sich insbesondere auf eine Eigenschaft der Atome, nämlich den Eigendrehimpuls des Kerns, den Kernspin, sowie das damit verbundene magnetische Moment. Die beiden genannten Charakteristika werden analytisch wie folgt ausgedrückt. Der Bahndrehimpuls des Elektrons wird durch

$$\begin{aligned} \bar{L}_3 &= \hbar m_L, \\ \bar{L}^2 &= \hbar^2 l(l+1), \\ \bar{L} &= |\bar{L}_j| = \hbar [l(l+1)]^{1/2}, \\ l &= \text{Bahndrehimpulsquantenzahl}, \\ l &\in \{0, 1, 2, 3, \dots\}, \\ m_L &= \text{magnetische Quantenzahl}, \\ m_L &\in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l\}. \end{aligned} \quad (1-1a)$$

dargestellt. Formal analog lauten der Eigendrehimpuls des Elektrons, der so genannte Elektronenspin,

$$\begin{aligned} \bar{s}_3 &= \hbar m_s, \\ \bar{s}^2 &= (3/4)\hbar^2, \\ \bar{s} &= |\bar{s}_j| = (3/4)^{1/2}\hbar, \\ s &= \text{Spinquantenzahl}, \\ s &= (1/2), \\ m_s &= \text{magnetische Spinquantenzahl}, \\ m_s &\in \{-1/2, +1/2\}, \end{aligned} \quad (1-1b)$$

und der Drehimpuls des Kerns bzw. der Kernspin

$$\begin{aligned} \bar{I}_3 &= \hbar m_I, \\ \bar{I}^2 &= \hbar^2 I(I+1), \\ \bar{I} &= |\bar{I}_j| = \hbar [I(I+1)]^{1/2}, \\ I &= \text{Kernspin-Quantenzahl}, \\ 0 \leq I &\leq 15/2, \\ m_I &= \text{magnetische Kernspin-Quantenzahl}, \\ m_I &\in \{-I, -I+1, \dots, I-1, +I\}. \end{aligned} \quad (1-1c)$$

Vergleiche zu (1-1a-c) auch Börger (2001), Abschnitt 1.3. Die Größe  $\hbar$  ist die »Quanteneinheit des Drehimpulses«, die sich aus der Division des Planckschen Wirkungsquants  $h$  durch  $2\pi$  ergibt. Da die Elementarteilchen Ladungen tragen, sind an die mechanischen Bewegungen magnetische Momente gekoppelt, nämlich das Magnetische Moment des Bahndrehimpulses des Elektrons

$$\mu_{j,Bahn} = \gamma_{Bahn} \bar{L}_j = (-g_l \mu_B / \hbar) \bar{L}_j, \quad (1-2a)$$

$$g_l = 1,$$

das Magnetische Moment des Elektronenspins

$$\mu_{j,Spin} = \gamma_{Spin} \bar{s}_j = (-g_s \mu_B / \hbar) \bar{s}_j, \quad (1-2b)$$

$$g_s = 2,0023,$$

sowie das Magnetische Moment des Kernspins

$$\mu_{j,Kern} = \gamma_{Kern} \bar{l}_j = (g_I \mu_K / \hbar) \bar{l}_j, \quad (1-2c)$$

$$g_I = g\text{-Faktor des Kerns}.$$

In (1-2a-c) sind  $\mu_B$  das Bohrsche Magneton und  $\mu_K$  das Kernmagneton [vgl. hierzu z. B. Heitz und Stöcker-Meier (1998), (2.6-31c), (2.6-33c)] und der Parameter  $e$  kennzeichnet die Elementarladung.

## 1.2 Verhalten des magnetischen Momentes im homogenen Magnetfeld

Setzt man allgemein ein magnetisches Moment einem Magnetfeld aus, so kommt es zu Wechselwirkungen. Gegenstand dieses Abschnittes sind die Wechselwirkungen der magnetischen Momente (1-2a-c) untereinander sowie diejenigen mit einem äußereren Magnetfeld.

Zur Beschreibung der Zusammenhänge nutzt man auch die Gesetzmäßigkeiten der klassischen Physik. Der Drehimpulssatz der klassischen Mechanik sagt aus, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses  $D_i$  eine Funktion des einwirkenden Drehmomentes  $M_i$  ist, das heißt

$$D_i/dt = M_i. \quad (1-3a)$$

Gemäß den Gesetzen der klassischen Magnetostatik wirkt auf ein magnetisches Moment  $\mu_i$ , das einem äußeren homogenen Magnetfeld  $B_{i,ext}$  ausgesetzt ist, das Drehmoment

$$\mu_i = \epsilon_{jkl} \mu_k B_{l,ext}, \quad (1-3b)$$

und verbunden mit diesem Drehmoment ist die potentielle magnetische Energie

$$V_{mag} = -\mu_j B_j. \quad (1-3c)$$

Zunächst wird nun die Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Moment des Elektronenspins, (1-2b), und dem Magnetfeld, das durch die Bahnbewegung des Elektrons erzeugt wird, untersucht. Diese Wechselwirkung bezeichnet man als Spin-Bahn-Kopplung, die sich mechanisch durch Addition von Bahndrehimpuls (1-1a) und Eigendrehimpuls des Elektrons (1-1b) vollzieht, also

$$\bar{j}_k = \bar{L}_k + \bar{s}_k. \quad (1-4a)$$

$$= \text{Drehimpuls der Spin-Bahn-Kopplung (SBK)}$$

mit

$$\begin{aligned} \bar{j}_3 &= \hbar m_j, \\ \bar{j}^2 &= \hbar^2 j(j+1), \\ \bar{j} &= |\bar{j}_k| = \hbar [j(j+1)]^{1/2}, \\ j &= SBK\text{-Quantenzahl}, \\ j &= |l \pm s| = |l \pm 1/2|, \\ m_j &= \text{magnetische SBK-Quantenzahl}, \\ m_j &\in \{-j, -j+1, \dots, j-1, +j\}. \end{aligned} \quad (1-4b)$$

Das, analog (1-2), zu (1-4a) gehörige Magnetische Moment des SBK-Drehimpulses wird mit

$$\mu_{k,SBK} = \gamma_{SBK} \bar{j}_k = (-g_j \mu_B / \hbar) \bar{j}_k, \quad (1-4c)$$

$$g_j = g\text{-Faktor des SBK-Drehimpulses}$$

angegeben [vgl. hierzu Haken und Wolf (1987), (13.17)]. Zur Berechnung des magnetischen Potentials bzw. der Spin-Bahn-Kopplungsenergie wird von (1-3c) ausgegangen, und man gelangt schließlich zu [vgl. zum Beispiel Haken und Wolf (1987), Abschnitt 12.8]

$$V_{FS} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{Z e^2 \mu_0 \hbar^2}{8 \pi m_e^2 r^3} \right) [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]. \quad (1-5a)$$

Der Ausdruck (1-5a) ist die so genannte Feinstrukturaufspaltung mit

$$Z = \text{Kernladungszahl} \quad (1-5b)$$

$$\mu_0 = \text{Induktionskonstante} \quad (1-5c)$$

$$r = \text{Bahnradius des Elektrons}. \quad (1-5d)$$

Streng genügt (1-5a) nicht der Quantentheorie, sondern es bedarf noch Korrekturen. Eine exakte und ausführliche Berechnung der Feinstrukturaufspaltung findet sich zum Beispiel in Schpolski (1978), § 204.

Betrachtet man den SBK-Drehimpuls (1-4a) in einem äußeren homogenen Magnetfeld  $B_{j,ext}$ , so liefert, wie schon zu (1-5), der Ansatz (1-3c)

$$\begin{aligned} V_Z &= -\mu_{j,SBK} B_{j,ext} \\ &= (g_j \mu_B / \hbar) \bar{j}_k B_{k,ext} \end{aligned} \quad (1-6a)$$

mit

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}. \quad (1-6b)$$

(1-6) beschreibt den anomalen Zeemann-Effekt. Ohne Berücksichtigung des Elektronenspins (Spinquantenzahl  $s = 0$ ) verschwindet der Quotient auf der rechten Seite von (1-6b), und es resultiert in (1-6a) der normale Zeemann-Effekt.

In gleicher Weise wie zu (1-5) und (1-6) werden nun Energierterme angegeben, die zum einen aus der Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Moment des Kernspins, (1-2c), und dem Magnetfeld der Elektronenhülle

resultieren sowie zum anderen aus der Korrespondenz von (1-2c) mit einem äußeren homogenen Magnetfeld. Zur Herleitung der Hyperfeinstrukturaufspaltung kopelt man den SBK-Drehimpuls (1-4a) mit dem Kernspin (1-1c) durch Addition zum Gesamtdrehimpuls des Atoms

$$\bar{F}_k = \bar{j}_k + \bar{I}_k, \quad (1-7a)$$

wobei

$$\begin{aligned} \bar{F}_3 &= \hbar m_F, \\ \bar{F}^2 &= \hbar^2 F(F+1), \\ \bar{F} &= |\bar{F}_k| = \hbar [F(F+1)]^{1/2}, \\ F &= \text{Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl}, \\ F &= \{j+I, j+I-1, \dots, j-I\}, \\ m_F &= \text{magn. Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl}, \\ m_F &\in \{-F, -F+1, \dots, F-1, +F\}. \end{aligned} \quad (1-7b)$$

In Analogie zu (1-2) wie auch (1-4) wird zum Gesamtdrehimpuls des Atoms ein magnetisches Moment, das so genannte **effektive magnetische Moment** als Funktion der Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl  $F$  und der magnetischen Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl  $m_F$  angegeben [vgl. hierzu auch Vanier und Audoin (1989), Abschnitt 4.1.1]. Wie mit der Vorgehensweise zu (1-5) beschrieben, berechnet sich die magnetische Zusatzergie hier zu

$$V_{HFS} = (g_I \mu_K B_{\bar{j}}/\hbar^2) [j(j+1)]^{-1/2} \bar{I}_k \cdot \bar{j}_k. \quad (1-8a)$$

und mit

$$\begin{aligned} A &= (g_I \mu_K B_{\bar{j}}) [j(j+1)]^{-1/2} \\ &= \text{Hyperfeinfaktor} \end{aligned} \quad (1-8b)$$

$$\bar{I}_k \cdot \bar{j}_k = (\hbar^2/2) [F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)] \quad (1-8c)$$

schreibt sich (1-8a), die Energie der Hyperfeinstruktur, kurz [vgl. hierzu Heitz und Stöcker-Meier (1998), (2.6-46e)]

$$V_{HFS} = (A/2) [F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)]. \quad (1-8d)$$

Der Hyperfein-Zeemann-Effekt tritt auf, wenn auf den Gesamtdrehimpuls des Atoms (1-7a) ein äußeres homogenes Magnetfeld  $B_{j,ext}$  einwirkt. Die analytische Bestimmung der Hyperfein-Zeemann-Aufspaltung ist vollkommen analog zu (1-6a), das heißt man macht den Ansatz

$$V_{HZ} = -(\mu_{j,SBK} + \mu_{j,Kern}) B_{j,ext}. \quad (1-9a)$$

In der weiteren Berechnung von (1-9a) wird für  $\mu_{j,Kern}$  der Ausdruck (1-2c) eingesetzt. Vom magnetischen Moment des SBK-Drehimpulses ist im Experiment lediglich die Projektion von  $\mu_{j,SBK}$  auf die Richtung von  $\bar{j}_k$  beobachtbar [vgl. hierzu die Ausführungen von Heitz und Stöcker-Meier (1998) zu (2.6-44)], so dass  $\mu_{j,SBK}$  durch

$$(\mu_{j,SBK})_{\bar{j}} = -(g_J \mu_B/\hbar) \bar{j}_k. \quad (1-9b)$$

zu substituieren ist.  $g_J$  ist gemäß (1-4c) bzw. (1-6b) der g-Faktor des SBK-Drehimpulses. Maßgeblich sind in (1-9a) die 3.-Komponenten der Vektoren, also diejenigen in Richtung des Feldes  $B_{k,ext}$ , so dass sich zunächst

$$V_{HZ} = \mu_B B_{3,ext} [(g_J/\hbar) \bar{j}_3 - (g_I/\hbar) (\mu_K/\mu_B) \bar{I}_3]. \quad (1-9c)$$

ergibt. Für die Vektorkomponenten  $\bar{j}_3$  und  $\bar{I}_3$  sind die beobachtbaren Werte zu bestimmen, was durch sukzessive Mittelung erreicht wird [vgl. hierzu Landau und Lifschitz (1979), § 113] und schließlich für (1-9c) zu

$$V_{HZ} = g_F \mu_B m_F B_{3,ext} \quad (1-9d)$$

mit

$$\begin{aligned} g_F &= g_J \frac{F(F+1) + j(j+1) - I(I+1)}{2F(F+1)} \\ &- \frac{\mu_K}{\mu_B} g_I \frac{F(F+1) + I(I+1) - j(j+1)}{2F(F+1)} \end{aligned} \quad (1-9e)$$

führt.

Neben der beschriebenen Segmentierung der Energie evoziieren Magnetfelder ein kinematisches Verhalten des Elektrons bzw. Kerns. So wirkt ein äußeres homogenes Magnetfeld einerseits derart auf den magnetischen Dipol von Kern oder Elektron, dass sich dieser wie ein konventioneller Magnet parallel oder antiparallel zur Feldrichtung einstellt, andererseits besitzen Kern und Elektron durch ihr Rotationsverhalten [vgl. hierzu (1-1)] die Eigenschaften eines Kreisels, so dass sie sich der Ingerenz des Magnetfeldes zu entziehen suchen und daher eine Präzessionsbewegung um die Feldrichtung ausführen. Dieses Kreiselmodell hat Larmor für die den Atomkern umkreisenden Elektronen entwickelt, und so wird die Ausweichbewegung des magnetischen Dipols als Larmor-Präzession bezeichnet [vgl. hierzu z. B. Haken und Wolf (1987), (12.12)].

### 1.3 Orientierungsänderungen im Magnetfeld

Atomuhren nutzen den Effekt der Kernspin-Resonanz, im Englischen mit »nuclear magnetic resonance (NMR)« bezeichnet, das meint unter anderem die Auslösung einer Richtungsänderung der Drehimpulsachse des Atomkerns durch ein äußeres magnetisches Wechselfeld, wenn der Kern in einem homogenen magnetischen Feld präzidiert. Ebenfalls eine Richtungsänderung ist bei der translatorischen Bewegung eines Atoms im inhomogenen Magnetfeld zu beobachten, das heißt eine Abweichung von der geradlinigen Bewegung. Eine quantitative und qualitative Beschreibung beider Phänomene vermittelt dieser Abschnitt.

Nachfolgende Darstellungen beziehen sich auf ein nicht inertiales Beobachtungssystem  $S_a$ . Damit stellt sich das

in der soeben vorangegangenen Einführung beschriebene Magnetfeld in der Weise

$$\overset{a}{B}_{k,ext} = \overset{a}{B}_{k.} + \delta \overset{a}{B}_{k.}(t) \quad (1-10a)$$

dar, wobei

$$\overset{a}{B}_{k.} = \overset{a}{B} \delta_{k3}. \quad (1-10b)$$

= äußeres, homogenes magnetisches Feld

$$\overset{a}{B} = |\overset{a}{B}_{k.}| \quad (1-10c)$$

$$\delta \overset{a}{B}_{k.}(t) = \delta \overset{a}{B} [\cos(\bar{\omega}t), \sin(\bar{\omega}t), 0] \quad (1-10d)$$

= äußeres, transversales magnetisches Wechselfeld

$$\bar{\omega} = \text{Rotationsfrequenz des magnetischen Wechselfeldes}. \quad (1-10e)$$

Um die Kernspindynamik anschaulich darzustellen, werden nachstehende Festsetzungen getroffen.

$$I = 1/2, \quad (1-11a)$$

so dass

$$m_I \in \{-1/2, +1/2\}, \quad (1-11b)$$

was einschränkend bedeutet, dass der Kernspin grundsätzlich zwei Einstellmöglichkeiten hat [vgl. hierzu (1-1c) in Verbindung mit (1-11b)], vorzugsweise in Richtung der 3. Achse.

Quantitative Aussagen zum Kernspinverhalten liefert erst die Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung. Für dieses Ziel wird unter Berücksichtigung der beiden Einstellmöglichkeiten des Kernspins für die Wellenfunktion

$$\psi(t) = C_1(t) \psi_{\uparrow} + C_2(t) \psi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} \quad (1-12a)$$

angesetzt, wobei  $\psi_{\uparrow}$  diejenige Wellenfunktion mit Orientierung des Kernspins in Richtung der positiven 3. Achse ist, und demgemäß steht  $\psi_{\downarrow}$  für die Wellenfunktion, die der inversen Richtung entspricht. Sie genügen den Beziehungen

$$\begin{aligned} \psi_{\uparrow} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \psi_{\uparrow}^* &= (1, 0), \\ \psi_{\downarrow} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \psi_{\downarrow}^* &= (0, 1). \end{aligned} \quad (1-12b)$$

Um einen physikalischen Ausdruck für die Kernspin-Wellenfunktion herzuleiten, wertet man die zeitabhängige Schrödingergleichung aus, die unter Vernachlässigung der kinetischen Energie

$$i\hbar \partial \psi / \partial t = E_{pot} \psi \quad (1-13a)$$

lautet [vgl. hierzu Börger (2001), (1-22d)]. Für die potentielle Energie lässt sich aus (1-3c) in Verbindung mit

(1-2c) und mit  $g_I = 1$ , also in klassischer Betrachtung, der Ausdruck

$$E_{pot} = -(e/2m_p) \bar{I}_j \cdot B_j, \quad (1-13b)$$

bzw. in Operatorschreibweise

$$E_{pot} := (e/2m_p) \hat{I}_j \cdot B_j. \quad (1-13c)$$

herleiten. Aufgrund der Restriktionen (1-11) lassen sich für  $\hat{I}_j$  die Paulischen Spinmatrizen [vgl. hierzu Heitz und Stöcker-Meier (1998), (2.6-28)] anwenden, so dass schließlich

$$E_{pot} = \left( \frac{e\hbar}{2m_p} \right) \begin{pmatrix} B_3. & B_1. - i B_2. \\ B_1. + i B_2. & -B_3. \end{pmatrix}$$

gefunden wird und damit die zeitabhängige Schrödingergleichung mit Beachtung von (1-12a) und (1-10) die Formen

$$\begin{aligned} & (\hbar \omega_0/2) C_1(t) + (\mu_K \delta \overset{a}{B} \exp[-i\bar{\omega}t]) C_2(t) \\ & = i\hbar \partial C_1(t) / \partial t \end{aligned} \quad (1-14a)$$

$$\begin{aligned} & (\mu_K \delta \overset{a}{B} \exp[i\bar{\omega}t]) C_1(t) - (\hbar \omega_0/2) C_2(t) \\ & = i\hbar \partial C_2(t) / \partial t \end{aligned} \quad (1-14b)$$

nimmt. In (1-14a,b) wurde die Abkürzung

$$\mu_K B = \hbar \omega_L = \hbar \omega_0/2$$

eingeführt, das heißt,  $\omega_0$  ist die zweifache Larmorfrequenz. Für die zeitabhängigen Koeffizienten  $C_1(t)$  und  $C_2(t)$  wählt man

$$C_1(t) = A_1(t) \exp[-i\omega_0 t/2]$$

$$C_2(t) = A_2(t) \exp[i\omega_0 t/2],$$

so dass sich die Gleichungen (1-14a,b) in

$$i\hbar \partial A_1 / \partial t = A_2 \mu_K \delta \overset{a}{B} \exp[-i(\bar{\omega} - \omega_0)t] \quad (1-14c)$$

$$i\hbar \partial A_2 / \partial t = A_1 \mu_K \delta \overset{a}{B} \exp[i(\bar{\omega} - \omega_0)t] \quad (1-14d)$$

überführen lassen. Induziert man durch das Wechselfeld Resonanz, also

$$\bar{\omega} = \omega_0 \quad \text{bzw.} \quad \bar{\omega} - \omega_0 = 0, \quad (1-14e)$$

vereinfachen sich die Gleichungen (1-14c,d), und man gelangt zur Schwingungsgleichung eines harmonischen Oszillators. Dafür lässt sich eine Lösung unmittelbar angeben, und man findet schließlich für die Koeffizienten  $A_1$  und  $A_2$

$$A_1(t) = \mathcal{A} \sin(\Omega t + \varphi),$$

$$A_2(t) = i\mathcal{A} \cos(\Omega t + \varphi),$$

so dass die Koeffizienten  $C_1$  und  $C_2$  den Beziehungen

$$C_1(t) = \mathcal{A} \sin(\Omega t + \varphi) \exp[-i\omega_0 t/2], \quad (1-14f)$$

$$C_2(t) = i\mathcal{A} \cos(\Omega t + \varphi) \exp[i\omega_0 t/2] \quad (1-14g)$$

genügen, und für die Kreisfrequenz  $\Omega$  gilt

$$\Omega = (\mu_K \delta \overset{a}{B})/\hbar. \quad (1-14h)$$

Aus der Normierungsbedingung der Wellenfunktion [vgl. hierzu Börger (2001), (1-16b)] ergibt sich

$$\mathcal{A} = 1,$$

und durch adäquate Wahl des Null-Zeitpunktes ist die Phasenverschiebung

$$\varphi = 0,$$

so dass die Kernspin-Wellenfunktion (1-12a) mit

$$\psi(t) = \alpha \psi_{\uparrow} + \beta \psi_{\downarrow}, \quad (1-14i)$$

wobei

$$\alpha = \sin(\Omega t) \exp[-i\omega_0 t/2], \quad (1-14j)$$

$$\beta = i \cos(\Omega t) \exp[i\omega_0 t/2], \quad (1-14k)$$

angeschrieben werden kann. Mit Hilfe der zeitabhängigen Schrödingergleichung (1-13a) ist die Kernspin-Wellenfunktion bestimmt, so dass nun ein Beobachtungswert für die 3. Komponente des Kernspins berechnet werden kann, was durch

$$\hat{I}_3. \psi = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}, \quad (1-15a)$$

also durch Bilden des Erwartungswertes erfolgt. Multiplikation von (1-15a) mit der konjugiert komplexen Wellenfunktion  $\psi^*$  liefert schließlich den gesuchten Erwartungswert

$$\langle \hat{I}_3. \rangle = -\hbar/2 \cos(2 \Omega t). \quad (1-15b)$$

In (1-15b) ist für den Zeitpunkt  $t = 0$  der Kosinus gleich 1 und die 3. Komponente des Kernspins zeigt nach unten. Wählt man das Argument des Kosinus so, dass  $2 \Omega t = \pi/2$ , dann verschwindet die 3. Komponente, und für  $2 \Omega t = \pi$  zeigt sie nach oben. Die beiden anderen Komponenten genügen jeweils

$$\langle \hat{I}_1. \rangle = -\hbar/2 \sin(2 \Omega t) \sin(\omega_0 t) \quad (1-15c)$$

$$\langle \hat{I}_2. \rangle = \hbar/2 \sin(2 \Omega t) \cos(\omega_0 t). \quad (1-15d)$$

Abschließend wird auf ein weiteres Phänomen der Richtungsänderung hingewiesen, nämlich die Änderung der Bewegungsrichtung eines Teilchens im inhomogenen Magnetfeld. Die diesbezüglichen theoretischen Zusammenhänge sind z.B. in Heitz und Stöcker-Meier (1998) zu (3.4-19, 20) beschrieben, und sie erweisen sich als relativ einfach, da sie sich aus der klassischen Mechanik bzw. Magnetostatik ergeben. Dieser Effekt ist von großer Bedeutung, denn Stern und Gerlach konnten in ihren Experimenten zeigen, wie man die Ablenkung von Atomen zum Nachweis der Orientierung magnetischer Dipole nutzen kann. Rabi entwickelte das Verfahren dahingehend weiter, dass sich auch magnetische Dipolübergänge, also Umklappungen wie zum Beispiel mit (1-15b) gezeigt, belegen lassen.

## 2 Funktionsprinzip von Atomuhren

### 2.1 Vorbemerkungen

In diesem Abschnitt wird das Funktionsprinzip von Atomuhren eingehend behandelt, wobei auf die erarbeiteten Grundlagen des Abschnittes 1 unmittelbar zurückgegriffen wird, das heißt, die einzelnen Effekte und Erscheinungen zur Anwendung gelangen. Zunächst ist eine grundsätzliche Unterscheidung zwischen aktiven, wie zum Beispiel Laser- sowie Maser-Frequenznormalen, und passiven Atomuhren, wie Cäsium- und Rubidium-Frequenznormalen, zu treffen. In diesem Beitrag werden ausschließlich passive Uhren behandelt, die originär auf der Atomstrahlresonanz-, auch Molekülstrahlresonanzmethode nach Rabi fußen. Ursprünglich aber wurde dieses Verfahren zum Zwecke des Nachweises von magnetischen Dipolübergängen entwickelt bzw. zum Studium der magnetischen Eigenschaften von Atomen und Molekülen sowie zur Analyse von magnetischen Wechselwirkungen innerhalb der Moleküle. Rabi erkannte bald die Möglichkeit, auf Grundlage der Resonanzmethode, ein Frequenznormal und damit die hochgenaue Bestimmung der Zeit zu realisieren. So behandelt dieser Abschnitt die Rabi-Methode sowie deren Weiterentwicklung durch Ramsey als auch Varianten einzelner Funktionselemente, die alternative Realisierungen von Frequenznormalen erlauben.

### 2.2 Atomstrahlresonanzmethode nach Rabi

Abb. 2.1 veranschaulicht das Atomstrahlresonanzverfahren nach Rabi, kurz Rabi-Methode genannt.

So wird zunächst in einem Ofen  $O$  ein gebündelter Strahl von Atomen erzeugt, ein so genannter **thermischer Atomstrahl**, der sich zusammensetzt aus Teilchen im Energiezustand  $E_1$  wie auch solchen im Energiezustand  $E_2$ . Ohne äußeren Einfluss laufen die Atome ausgehend vom Ofen längs der 1.a-Achse zum Detektor  $D$ , der dann ein Maximum einfallender Atome registriert. Die Magneten  $MF1$  und  $MF2$  erzeugen äußere, inhomogene Magnetfelder, und werden sie eingeschaltet, so bewirkt die aus den Magnetfeldern resultierende Kraft eine Ablenkung der Atome aus der ursprünglichen Bewegungsrichtung. Dabei werden Atome im Energiezustand  $E_2$  anders abgelenkt als diejenigen im Zustand  $E_1$ , nämlich so, dass Atome im Zustand  $E_2$  nicht mehr Komponente des Strahls sind und damit ein **zustandsselektierter Atomstrahl** vorliegt. Durch das Hintereinanderanordnen der Felder  $MF1$  und  $MF2$ , die entgegengesetzte Feldgradienten besitzen, wird die Gesamtablenkung für den zustandsselektierten Atomstrahl kompensiert, so dass sämtliche Atome des Strahls nach wie vor, wie in der Abbildung durch die durchgezogene Linie dargestellt, zum Detektor gelangen. Zusätzlich zu  $MF1$  und  $MF2$  wird nun das in der Mitte angeordnete, homogene Magnetfeld  $HMF$  eingeschaltet, und des Weiteren wird das homogene Mag-

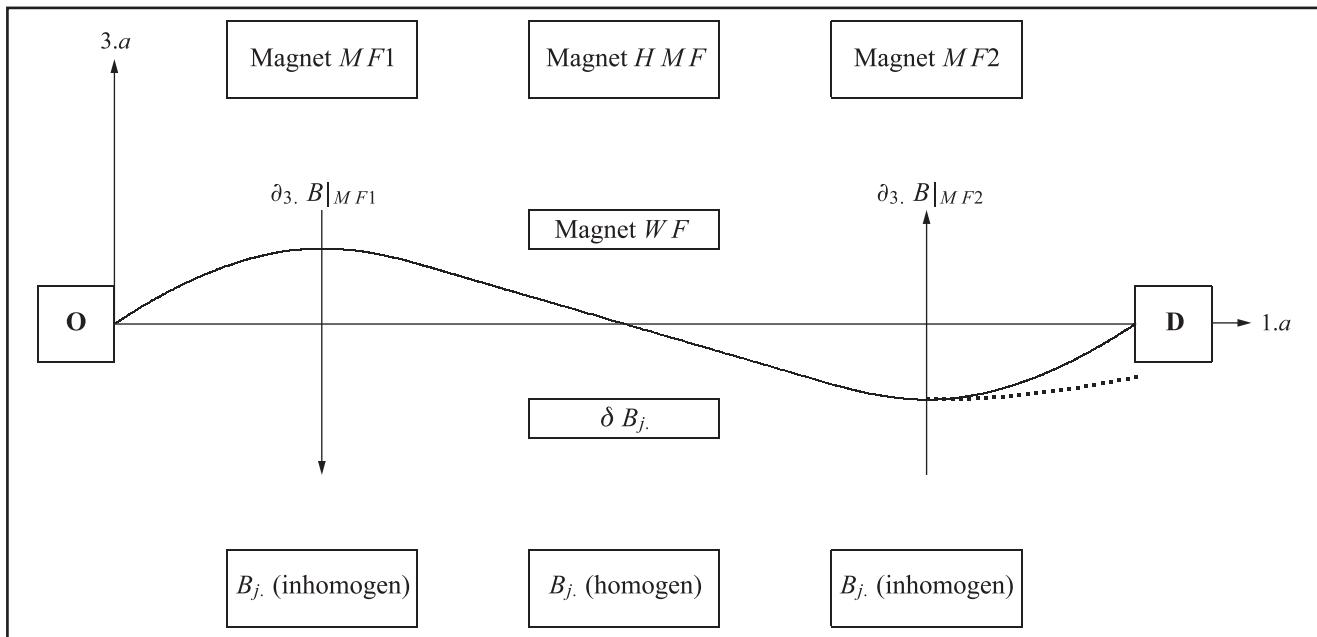


Abb. 2.1: Schematisierte Atomstrahlresonanz nach Rabi

netfeld mit einem zu  $HMF$  transversalen, magnetischen Wechselfeld  $WF$  überlagert [vgl. hierzu (1-10)], so dass im Falle der Resonanz, also bei Erfüllung von (1-14e) der Kernspin sowohl, aufgrund des homogenen Magnetfeldes, eine Präzessionsbewegung mit der Frequenz  $\omega_0$  [vgl. hierzu (1-15c,d)] durchführt als auch, aufgrund des magnetischen Wechselfeldes, »umklappt« wie mit (1-15b) gezeigt. Mit dem Einstrahlen der Resonanzfrequenz sind nicht nur kinematische Prozesse verbunden, sondern auch Änderungen des Energiezustandes, das heißt »Übergänge« vom Energiezustand  $E_1$  nach  $E_2$ . Damit verbunden ist dann das bereits erwähnte »Umklappen«, nämlich ein negatives, effektives magnetisches Moment, das ein anderes Ablenkverhalten zeigt, was in der Abbildung durch die gestrichelte Linie illustriert wird, so dass die Atome im Zustand  $E_2$  nun nicht mehr zum Detektor gelangen und dieser damit ein Minimum aufzeichnet. Am Detektor registriert wird also die Intensität, respektive die Anzahl der einfallenden Atome in Abhängigkeit von der eingespeisten Frequenz, das heißt der Frequenz des magnetischen Wechselfeldes  $\bar{\omega}$ , (1-10e). Dieses Intensitäts- bzw. Nachweissignal  $I_D$ , nämlich der Nachweis der Resonanz, das meint die Erfüllung der Bedingung (1-14e), ist proportional zu der Wahrscheinlichkeit, dass eine Zustandsänderung eingetreten ist. Die graphische Darstellung des Nachweissignals  $I_D$  als Funktion der Frequenz  $\bar{\omega}$ , der Testfrequenz, ergibt die so genannte Resonanzkurve. Beispielhaft demonstriert Abb. 2.2 eine Ramsey-Resonanzkurve, denn diese zeigt ein Maximum, welches am Detektor beobachtet wird [vgl. hierzu Abschnitt 2.3].

Diese Resonanzkurve gibt Auskunft über die Übereinstimmung von Resonanz- und Testfrequenz. Das bedeutet, aus dem Nachweissignal muss ein Regelsignal zur Steuerung von  $\bar{\omega}$  erzeugt werden, so dass die Testfrequenz gradatim der Resonanzfrequenz angepasst wird. Optimal lässt sich die Resonanzfrequenz genau dann be-

stimmen, wenn die Linienbreite  $W$ , das heißt die gemessene Breite des Maximums in halber Höhe, klein ist. Für die Linienbreite der Rabi-Resonanz gilt zum Beispiel [vgl. hierzu Vanier und Audoin (1989), vol. 2, (5.2.29)]

$$W = 5,02/t, \quad t = l/v, \quad (2-1a)$$

wobei

$$t = \text{Wechselwirkungszeit der Atome mit dem Wechselfeld} \quad (1-14d) \quad (2-1b)$$

$$v = \text{Geschwindigkeit der Atome} \quad (2-1c)$$

$$l = \text{geometrische Länge der Wechselwirkungsregion} . \quad (2-1d)$$

Gemäß (2-1a) ist die Linienbreite  $W$  genau dann klein, wenn  $t$  groß ist bzw.  $v$  klein und  $l$  groß. Allerdings lässt sich (2-1b) nicht beliebig variieren, sondern obliegt einer Restriktion, da die geometrische Länge der Wechselwirkungsregion, (2-1d), der Wellenlänge der Bestrahlung angepasst sein muss.

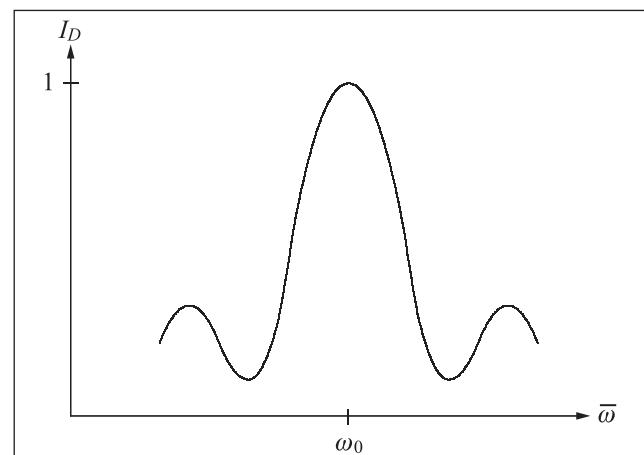


Abb. 2.2: Messsignal auf 1 normiert (exemplarisch)

### 2.3 Atomstrahlresonanzmethode nach Ramsey

Grundsätzlich bleibt das Prinzip der Rabi-Methode [vgl. hierzu Abschnitt 2.2] bestehen, allerdings erfährt diese dahingehend eine Modifikation, als dass die *HMF-Region* nicht nur ein transversales, magnetisches Wechselfeld *WF* integriert, sondern nunmehr zwei *WF*, eines am Anfang und eines am Ende der *HMF-Region*. Diese Anordnung ist in Abb. 2.3 dargestellt, und sie verbessert die Leistungsfähigkeit einer Atomuhr wesentlich, da enge Resonanzlinien erzeugt werden können. Die Linienbreite der Ramsey-Resonanz wird von Vanier und Audoin (1989), vol. 2, (5.2.37) zum Beispiel mit

$$W \approx \pi/T, \quad T = L/v, \quad (2-2a)$$

wobei

$$T = \text{Verweildauer im Resonator} \quad (2-2b)$$

$$v = \text{Geschwindigkeit der Atome gemäß (2-1c)} \quad (2-2c)$$

$$L = \text{Abstand der beiden WF (Resonatorlänge)} \quad (2-2d)$$

angegeben. So ist also die Linienbreite der Ramsey-Resonanzkurve genau dann klein, wenn die Verweildauer *T* im Resonator groß ist, das heißt, der Abstand *L* zwischen den beiden *WF* sollte groß sein bzw. die Geschwindigkeit der Atome klein. Der Abstand *l* in der Abb. 2.3 ist gemäß (2-1d). Aus (2-2a) folgt das Bestreben, Atomuhren möglichst groß zu bauen. So ist die Resonatorlänge der Cäsiumuhr NBS 6 des amerikanischen National Institute of Standards and Technology (NIST) 3,7 m, wohingegen kommerzielle Cäsiumatomuhren lediglich eine Länge von 0,15 m aufweisen.

Der Gesamtablauf gestaltet sich dann wie folgt. Der im Ofen *O* erzeugte, thermische Atomstrahl passiert den Magneten *MF*, der, wie auch bei der Rabi-Methode, Atome im Energiezustand *E*<sub>2</sub> herausfiltert, so dass ein zustandsselektierter Strahl entsteht. Dieser Strahl gelangt in

die *HMF-Region* mit den zwei räumlich getrennten Wechselfeldern *WF*, wo ein Übergang vom Energiezustand *E*<sub>1</sub> nach *E*<sub>2</sub> induziert wird. Nach Austritt des Atomstrahls aus der *HMF-Region* werden durch einen zweiten Magneten *MF*, der dem ersten identisch ist, sämtliche Atome im Energiezustand *E*<sub>2</sub> zum Detektor gelenkt, wohingegen alle Teilchen im Zustand *E*<sub>1</sub> den Detektor nicht erreichen. Der Detektor erfasst somit ein Maximum einfallsender Atome.

## 3 Die Cäsiumatomuhr

### 3.1 Vorbemerkungen

Atomuhren sind verschiedentlich realisiert. So wurden bereits in Abschnitt 2.1 Laser-Frequenznormale wie auch Wasserstoffmaser angesprochen. Beide Zeitmesser zählen zu den aktiven Frequenznormalen, was meint, dass von den Atomen »aktiv« Strahlung emittiert wird, die dann ein Detektor aufzeichnet. Im Gegensatz dazu wird bei den passiven Frequenznormalen extern eine Strahlung generiert mit dem Zweck, einen Quantensprung zu induzieren, so dass die Detektion des neuen Energiezustandes als Beobachtungsgröße gilt. Zum letzteren Typ von Frequenznormalen gehören die Rubidium- und Cäsiumuhren. Die Rubidiumuhr findet aufgrund ihrer Eigenschaften Verwendung als Sekundärnormal, wohingegen die Cäsiumuhr ein Primärnormal darstellt. Cäsiumatomuhren besitzen vor allem deswegen herausragende Bedeutung, da sie die Zeiteinheit realisieren, denn seit dem Jahr 1967 wird die Sekunde im Internationalen Einheitensystem SI über die Frequenz des Hyperfeinstrukturübergangs im Grundzustand des Nuklids <sup>133</sup>Cs definiert [vgl. hierzu Heitz und Stöcker-Meier (1998), (3.3-13a)]. Des Weiteren bildet die Primärnormale die Grundlage der Zeitskalen

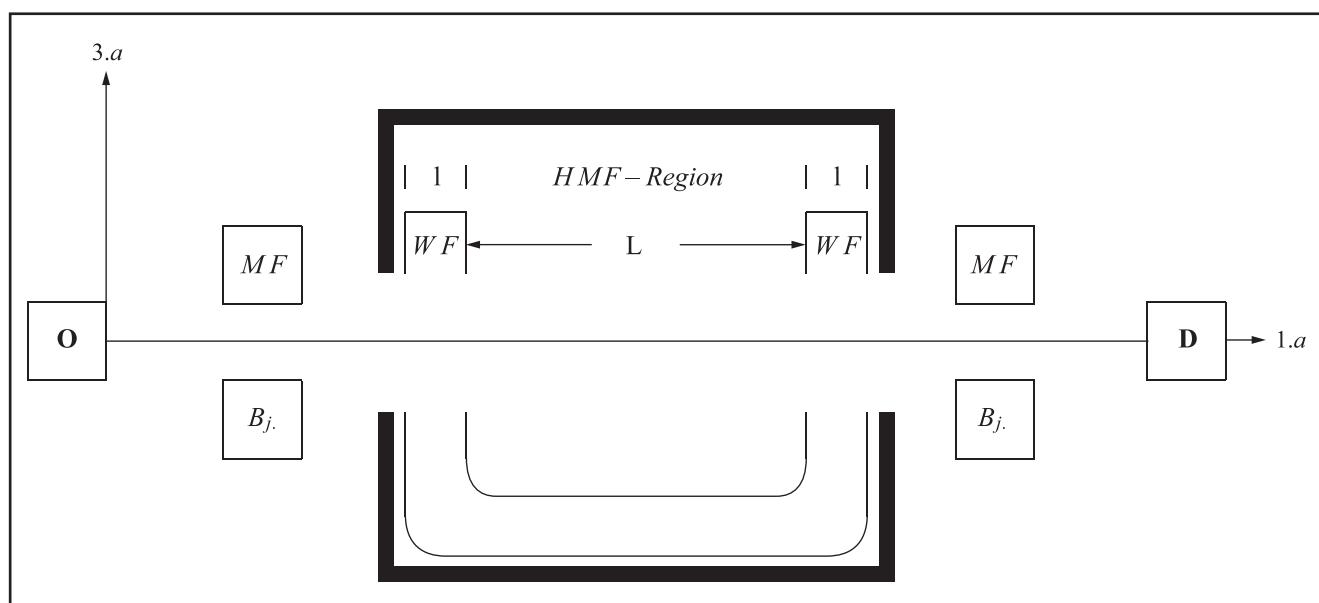


Abb. 2.3: Atomstrahlresonanz-Apparatur nach Ramsey

»Temps Universel Cordonné (UTC)« sowie »Temps Atomique International«. So wird in diesem Abschnitt in Sonderheit auf die technischen Aspekte der Cäsiumatomuhr eingegangen.

### 3.2 Das Cäsiumatom

Atomare Basis einer Cäsiumuhr ist das Cäsium-Atom aus der Gruppe der Alkali-Metalle, wobei das Element  $^{133}\text{Cs}$  das einzige stabile Isotop darstellt. Das Atom  $^{133}\text{Cs}$  ist im Grundzustand wie folgt charakterisiert

$$S = 1/2 = \text{Spinquantenzahl der Elektronenhülle} \quad (3-1a)$$

$$L = 0 = \text{Bahndrehimpuls-Quantenzahl der Elektronenhülle} \quad (3-1b)$$

$$J = 1/2 = \text{SBK-Quantenzahl der Elektronenhülle} \quad (3-1c)$$

$$I = 7/2 = \text{Kernspin-Quantenzahl}, \quad (3-1d)$$

dass sich kurz

$$^2S_{1/2} \quad (3-2a)$$

ergibt. (3-2a) ist nach der Vorschrift von Heitz und Stöcker-Meier (1998), (2.6-74a), angegeben, wobei unbedingt zu beachten ist, dass  $S$  in (3-2a) eine andere Bedeutung besitzt als (3-1a). Für die Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl (1-7b) gilt mit (3-1c,d)

$$\begin{aligned} F_1 &= 3 = \text{Energiezustand } E_1 \\ F_2 &= 4 = \text{Energiezustand } E_2. \end{aligned} \quad (3-2b)$$

Die in (3-1) mit Großbuchstaben gekennzeichneten Quantenzahlen verweisen auf ein Mehrelektronensystem. Im ersten angeregten Zustand des  $^{133}\text{Cs}$  bleibt die Eigenschaft (3-1a), wohl ist anstelle von (3-1b)

$$L = 1, \quad (3-3a)$$

woraus für die SBK-Quantenzahl nach (1-4b)

$$J_1 = 3/2 \quad J_2 = 1/2 \quad (3-3b)$$

folgt, und damit der erste angeregte Zustand aufspaltet in

$$^2P_{3/2} \quad ^2P_{1/2}. \quad (3-3c)$$

Mit (3-2a,b) sind verschiedene Hyperfein-Energiezustände verbunden, deren Differenz sich gemäß

$$\Delta V_{HFS} = E_2 - E_1 = A F_2 = 4A, \quad (3-4a)$$

$$A = \text{Hyperfeinfaktor gemäß (1-8b)}, \quad (3-4b)$$

ergibt, woraus für die Frequenz

$$\nu = A F_2 / h \quad (3-4c)$$

folgt. Misst man die Cäsiumfrequenz (3-4c) in Einheiten der Ephemeridensekunde, ergibt sich als Wert für die Übergangsfrequenz

$$\nu = 9,192631770 \text{ GHz}. \quad (3-4d)$$

### 3.3 Realisierungen der Cäsiumuhr

Zwei Funktionsprinzipien einer Atomuhr sind in Abschnitt 2 beschrieben worden. Allerdings hat sich bei der Realisierung der atomaren Chronometer die in Abschnitt 2.3 beschriebene Ramsey-Methode etabliert, wobei in den ersten Jahren die Zustands- und Geschwindigkeitsselektion allein mittels magnetischer Verfahren erfolgte, wie auch in den Abschnitten 2.2 und 2.3 beschrieben. Später wurden dann Cäsiumatomuhren gebaut, die das Optische Pumpen [vgl. hierzu Audoin (1992)] als Selektionsverfahren nutzten. Es hat sich gezeigt, dass beide Selektionsvarianten äquivalent sind und mit dem Optischen Pumpen keine signifikanten Vorteile verbunden sind. So wird dieser Uhrentyp an dieser Stelle nicht weiter vertieft, sondern es wird auf die Literatur verwiesen, z. B. Bauch und Telle (2002). Allgemein sind die konventionellen Cäsiumuhren weit verbreitet und bereits seit langer Zeit in Betrieb. So wird seit 1969 an der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) in Braunschweig die Zeiteinheit durch die Cäsiumuhr CS1 realisiert. Die PTB entwickelte dann weitere Uhren bis hin zur CS4. Bei diesen Uhren wird in einem Ofen mit einer Temperatur von etwa 100 °C ein thermischer Atomstrahl erzeugt, und, wie oben dargelegt, werden Magneten zur Geschwindigkeitsselektion eingesetzt, nämlich Quadrupol- und Hexapolmagneten bei CS1 und CS2. Auf diese Weise werden für die Atome mittlere Geschwindigkeiten von  $\leq 100 \text{ m/s}$  generiert, und dies trägt, wie zu (2-1) und (2-2) beschrieben, zur Genauigkeitssteigerung bei. Ebenfalls werden systematische Frequenzfehler herabgesetzt, die proportional zur Geschwindigkeit der Atome sind. Die Magneten dienen des Weiteren der Zustandsselektion, und der solchermaßen präparierte Atomstrahl tritt dann in die HMF – Region [vgl. hierzu Abb. 2.3] ein, wo der Übergang zwischen den Hyperfeinstrukturniveaus  $E_1 \rightarrow E_2$  [vgl. hierzu (3-4)] induziert wird. Wie zu (2-1a,2a) ausgeführt, ist im Zusammenhang mit der HMF – Region die Resonatorlänge (2-2d) von Bedeutung, da sie zur Genauigkeitssteigerung beiträgt. Bei kommerziellen Cäsiumuhren wird sie mit  $L = 0,15 \text{ m}$  angegeben und bei Laboruhren ist  $L = 0,80 \text{ m}$ , wie zum Beispiel bei den primären Uhren der PTB. Daraus resultiert dann eine Linienbreite [vgl. hierzu (2-1a,2a)] von 60 Hz, und bei den neueren Cäsiumuhren der PTB, CS3 und CS4, konnte diese sogar auf 44 Hz herabgesetzt werden.

### 3.4 Qualitätsmerkmale der Cäsiumuhr

Prägnant soll nun auf Qualitätsmerkmale von Zeit- und Frequenznormalen eingegangen werden, die vor allem die Genauigkeit und die Stabilität sind. Gemäß Hase (1999) versteht man in der Zeitmessung unter Genauigkeit [vgl. hierzu auch Bauch und Telle (2002)] den Übereinstimmungsgrad zwischen Messergebnis und fehlerbefreitem Wert der Messgröße. In diesem Kontext ist dann

auch der Begriff »Präzision« zu erläutern, worunter man die zufällige Unsicherheit eines Messwertes versteht, die durch eine Standardabweichung ausgedrückt wird. Konkret beschreibt die Unsicherheit die Kongruenz von realisierter Sekundendauer und Sekundendefinition (Sollwert). Für die primäre Atomuhr CS2 der PTB wird eine Unsicherheit von  $1,5 \cdot 10^{-14}$  angegeben [vgl. hierzu Bauch (1995)]. **Frequenzstabilität**, respektive -instabilität meint Frequenzveränderungen innerhalb eines Zeitintervall  $\tau$ , verglichen mit einer anderen Frequenz. Als Maß für die relative Frequenzinstabilität dient die Zwei-Proben-Varianz, die so genannte Allan-Varianz  $\sigma_y(\tau)$ , die zum Beispiel in Bauch und Telle (2002) oder Hase (1999) beschrieben ist. Für die primären Cäsiumuhren der PTB, CS1 und CS2, sind die  $\sigma_y(1\text{ day})$ -Werte  $3 \cdot 10^{-14}$  bzw.  $1 \cdot 10^{-14}$ .

## 4 Ausblick

Die derzeitigen Qualitäten der in diesem Beitrag beschriebenen Uhren markieren ein sehr hohes Niveau, und relativ zu den Anfängen vor etwa 45 Jahren konnte die Unsicherheit um vier Größenordnungen reduziert werden, wobei zu betonen ist, dass das Konstruktionsprinzip der Cäsiumuhren unverändert blieb. Auf diesem Hintergrund scheint es, dass die Leistungsgrenze nunmehr erreicht ist. Allerdings haben die neu entwickelten und im Jahre 1997 mit dem Nobelpreis gewürdigten Verfahren zur Sammlung und Kühlung von Atomen den Cäsiumuhren zu einem bedeutsamen Fortschritt verholfen. Dabei bleibt das grundsätzliche Funktionsprinzip, wie es in diesem Beitrag beschrieben worden ist, erhalten. Wohl werden mit einer so genannten Magneto-Optischen Falle Atome eingefangen und dann deutlich abgekühlt. Die so entstandene Melasse wird derart aufwärts beschleunigt, dass sie nach etwa einem Meter unter dem Einfluss der Schwerkraft wieder zurück fällt. Mit einer solchen Cäsium-Fontäne sind erfolgversprechende Aussichten verbunden. Man erwartet Unsicherheiten, die relativ zu den herkömmlichen Zeitmessern um etwa eine Größenordnung kleiner sind, nämlich  $1 \cdot 10^{-15}$ . Auch in Bezug auf die relative Frequenzinstabilität sind die ersten Ergebnisse deutlich positiv. So benötigt man gemäß Bauch (2001) mit der Uhr CS1 etwa 36 Stunden für ein  $\sigma_y(\tau)$  von  $1 \cdot 10^{-14}$ , dahingegen bedarf es mit der neu entwickelten Cäsium-Fontäne CSF1

der PTB nur 20 Minuten. So wird der Progress der Atomuhren weiterhin gegeben sein, wobei der Cäsium-Fontäne diesbezüglich eine besondere Bedeutung zukommen wird [vgl. hierzu Bauch und Telle (2002) sowie Bauch (2001)].

## Literatur

- Audoin, C.: Caesium Beam Frequency Standards: Classical and Optically Pumped. *Metrologia*, 29, 113–134, 1992.
- Bauch, A., Dorenwendt, K., Hetzel, P.: Die Darstellung der Sekunde. *PTB-Mitteilungen*, Nr. 104, Heft 1, 1994.
- Bauch, A.: Eine Notiz zur Geschichte der Cäsiumatomuhren. *PTB-Mitteilungen*, Nr. 105, Heft 5, 1995.
- Bauch, A.: Zeitmessung mit Fontänen. *Zeitschrift »Physik in unserer Zeit«*, 32. Jg., Heft 6, 2001.
- Bauch, A., Telle, H.R.: Frequency standards and frequency measurement. *Reports on progress in physics*, 65, 789–843, 2002.
- Börger, K.: Das Quantendynamometer – Ein Beispiel zur geodätischen Nutzung der Schrödinger-Gleichung. *Zeitschrift für Vermessungswesen* 126, 353–361, 2001.
- Demtröder, W.: *Experimentalphysik*, Band 3, Atome, Moleküle und Festkörper. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.
- Grimsehl, E.: Lehrbuch der Physik, Band 4, Struktur der Materie. Teubner, Leipzig, 1988.
- Haken, H., Wolf, H. C.: *Atom- und Quantenphysik*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.
- Hase, H.: Theorie und Praxis globaler Bezugssysteme. *Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie*, Bd. 13, 1999.
- Heitz, S., Stöcker-Meier, E.: *Grundlagen der Physikalischen Geodäsie*. Dümmler, Bonn, 1998.
- Landau, L.D., Lifschitz, E.M.: *Lehrbuch der Theoretischen Physik*, Band III, Quantenmechanik. Akademie-Verlag, Berlin, 1979.
- Schlüter, W.: Zeit und Frequenz im Meßverfahren der Geodäsie. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 337, 1988.
- Schödlauer, A.: *Geodätische Astronomie*. De Gruyter, Berlin, New York, 2000.
- Schpolski, E.W.: *Atomphysik*, Band I. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.
- Schpolski, E.W.: *Atomphysik*, Band II. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978.
- Vanier, J., Audoin, C.: *The quantum physics of atomic frequency standards*. volume 1 and 2. Adam Hilger, Bristol, Philadelphia, 1989.

## Anschrift des Autors

Dr.-Ing. Klaus Börger  
Amt für Geoinformationswesen der Bundeswehr  
Dezernat 211  
Kommerner Straße 188  
53879 Euskirchen