

# Das Ortra-Verfahren für die Überführung des Liegenschaftskatasters nach ETRS89/UTM in Bayern

Clemens Glock, Rainer Bauer, Thomas Wunderlich, Roland Pail und Kai-Uwe Bletzinger

## Zusammenfassung

Zum Jahresbeginn 2019 wird in Bayern das Europäische Terrestrische Referenzsystem 1989 (ETRS89) als amtliches Bezugssystem für das Liegenschaftskataster und die Geotopographie eingeführt. Gleichzeitig erfolgt die Überführung des Raumbezugs des Amtlichen Liegenschaftskataster-Informationssystems ALKIS nach ETRS89/UTM. Für die Umformung verschiedener Objektbereiche aus ALKIS hat das Landesamt für Digitalisierung, Breitband und Vermessung den Umformungsansatz Ortra entwickelt, der auf einer Ausgleichung basiert. Die Ausgleichung weist durch orthogonale Beobachtungsdefinitionen elasto-mechanische Analogien auf. Das für die Umformung durch Pseudobeobachtungen aufgebauzte Netz befindet sich in einem statischen Gleichgewicht und reagiert nach mechanischen Gesetzen und Energieprinzipien wie dem Prinzip der minimalen Formänderungsenergie. Die Übertragung der Nachbarschaftsgenauigkeit von GK nach UTM durch das Prinzip der minimalen Formveränderung und die Reduzierung von Netzzspannungen durch Verteilung führen dazu, dass beim Übergang in das europäische Referenzsystem ETRS89 eine Homogenisierung der Daten erreicht wird. Dieser Artikel stellt die Grundlagen des Ortra-Ansatzes dar und leitet unter Heranziehung mechanischer Gesetze her, wie der Ortra-Ansatz die Geometrie bei vorhandenen Netzzspannungen erhält. Zuletzt wird gezeigt, wie beim hierarchischen Ansatz von Ortra Koordinatenwidersprüche, die durch Netzzspannungen verursacht werden, verteilt werden.

## Summary

*At the beginning of the year 2019 the European Terrestrial Reference System 1989 will be established in Bavaria as authoritative coordinate system for the cadastre and for the geotopography. The Spatial Reference System of the Authoritative Real Estate Cadastre Information System ALKIS will change simultaneously to ETRS89/UTM. For the transformation of different cadastral feature type groups of ALKIS the Bavarian National Mapping Agency for Digitisation, High-Speed Internet and Surveying has developed the transformation approach Ortra, which uses least-squares adjustment techniques. The Ortra adjustment model furthermore possesses elasto-mechanical analogies. For the transformation, the necessary geodetic network constructed of pseudo-observations with orthogonal elements is in the state of equilibrium and therefore subject to mechanical laws like the theorem of least work. The preservation of neighborhood accuracy from GK to UTM by least work and the reduction of net distortions results in a homogenization of data during the transformation process to the European system ETRS89. The paper presents the fundamentals of the ortra approach. By means of laws of mechanics it is discussed how the Ortra approach preserves*

*the geometry in the presence of net distortions. Finally, it will be shown for the hierarchical network approach of Ortra, how coordinate discrepancies, which are caused by net distortions, are distributed.*

**Schlüsselwörter:** UTM-Überführung, Liegenschaftskataster, Ausgleichung, Homogenisierung, Statik des Netzes

## 1 Einleitung

Zum Jahresbeginn 2019 wird in Bayern das europaweit einheitliche Europäische Terrestrische Referenzsystem 1989 (ETRS89) mit dem Abbildungssystem der Universalen Transversalen Mercator Projektion (UTM) als amtliches Lagebezugssystem eingeführt.

Die Definition des europäischen Referenzsystems ETRS89 basiert als erdfestes, geozentrisch gelagertes und dreidimensionales Referenzsystem auf dem im Jahr 1987 durch internationale geodätische Institutionen festgelegten Internationalen Terrestrischen Referenzsystem (ITRS). Das ETRS89 wurde vom ITRS zur Periode  $t_0 = 1989.0$  abgeleitet. Wegen Einflüssen der Plattentektonik in 25 Jahren, die verantwortlich sind für die Verschiebung der Europäischen Platte gegenüber der aktuellen Realisierung des internationalen Referenzsystems ITRS, weist nun die Lage von ETRS89 Abweichungen bis ca. 60 cm zum Referenzsystem ITRS in Deutschland auf (Görres und Nothnagel 2012, Joos und Glock 2016).

Mit der Überführung der amtlichen Geobasisdaten werden die Beschlüsse der Arbeitsgemeinschaft der Vermessungsverwaltungen der Länder der Bundesrepublik Deutschland (AdV) vom Mai 1991 und Mai 1995 in Bayern abschließend umgesetzt, das über mehrere Jahrzehnte gültige amtliche nationale Lagebezugssystem Deutsches Hauptdreiecksnetz (DHDN) mit der Gauß-Krüger-Abbildung (GK) durch ETRS89 und UTM abzulösen.

Für die Überführung der Geobasisdaten der Geotopographie hat sich seit 2007 mit dem NTv2-Ansatz BeTA2007 ein Standard zur Überführung sowohl von Rasterdaten, wie z.B. Topographischen Karten oder Digitalen Orthophotos, als auch von Vektordaten, wie ATKIS (Amtliches Topographisches Kartographisches Informationssystem), etabliert. Dagegen ist die Bandbreite der von den Bundesländern eingesetzten Transformationsverfahren zur Überführung der Daten des Liegenschaftskatasters groß.

Die Abkürzung NTv2 steht für das Verfahren *National Transformation Version 2* und ist ein gitterbasiertes

Verfahren zur Umformung von Geodaten von einem festen Start- zu einem festen Zielsystem und umgekehrt. Für die in Binärform in einer Datei (NTv2-Datei) speicherbare Transformationsvorschrift werden für die Schnittpunkte der Gitterlinien Verschiebeparameter, sogenannte Shiftwerte, definiert.

Zur Vorbereitung und Durchführung der Umformung der Geobasisdaten des Liegenschaftskatasters nach ETRS89/UTM wurde 2012 am damaligen Landesamt für Vermessung und Geoinformation (jetzt: Landesamt für Digitalisierung, Breitband und Vermessung, LDBV) das Projekt KanU »Kataster nach UTM« eingerichtet (Hampp und Glock 2017). Die Projektziele beinhalten:

- Das vorliegende, mit GNSS-Messungen aufgebaute Katasterfestpunktfeld soll durch die Umformung keine Veränderung im neuen Bezugssystem erfahren (Prinzip ein Punkt – *ein* Satz von Koordinaten).
- Zum Aufbau eines homogenen Koordinatensystems sollen Verfahren untersucht werden, die eine Überführung der ALKIS-Grundrissdaten nach UTM bei möglichst gutem Erhalt der Nachbarschaftsgenauigkeit unter gleichzeitiger Minimierung der Netzspannungen ermöglichen.
- Die Geometrie der Grundrissdaten soll bei vorhandenen Netzspannungen weitgehend erhalten bleiben.

Als Nebeneffekt der dargestellten Ziele ergibt sich für die verschiedenen Objektbereiche von ALKIS auch eine Verbesserung der globalen Lagegenauigkeit.

Nach einer einjährigen Methodensuche hat sich Bayern dafür entschieden, für die Umformung des Liegenschaftskatasters das Ortra-Verfahren (orthogonale Transformation) einzusetzen. Für die Ausgleichung der verschiedenen Objektbereiche werden für die Auflösung der entstehenden Normalgleichungssysteme Sparse-Matrizen und spezielle Sparse-Matrizen-Technologien, z.B. das Verfahren Supernodal Sparse Cholesky Faktorisierung, eingesetzt. Für die Objektbereiche Flurstücke, Gebäude und Bauwerke werden insgesamt 2,0 Milliarden Beobachtungen definiert, die die Grundlage für die Auflösung der 880 Millionen Unbekannten der Ausgleichung bilden. Bei einer anschließenden, vom numerischen Aufwand vergleichbaren Ausgleichung für die Erstellung der Transformationsvorschrift für den Kundentransformationsansatz kommen weitere 1,5 Milliarden Beobachtungen hinzu.

## 2 Das Umformungs- und Homogenisierungsverfahren Ortra

Koordinatenumformungsverfahren, wie z.B. das bei der ETRS89-Bezugssystemeinführung in Baden-Württemberg zur Überführung des Liegenschaftskatasters eingesetzte Membranverfahren (Gielsdorf und Gründig 1997) und das in Bayern bei der UTM-Umstellung des Liegenschaftskatasters zur Anwendung kommende Ortra-Ver-

fahren (Glock und Vetter 2014, Glock 2016, Hampp und Glock 2017), greifen auf die Theorie der Elastizität zurück. Die Umformungsverfahren sind als rechenintensiv arbeitende vermittelnde Ausgleichungsverfahren aufgebaut.

Moderne geodätische Koordinatenumformungsverfahren leisten einen Beitrag zur Erzeugung von homogenen Koordinaten durch Abbau von Netzspannungen beim Übergang vom alten in das neue Referenzsystem. Homogene Koordinaten erfüllen hohe Genauigkeitsanforderungen, z.B. hohe Nachbarschaftsgenauigkeit und quasidirekte Positionierung mit modernen Globalen Navigationssatellitensystemen (GNSS).

Die Beobachtungsgleichungen werden bei mechanisch wirkenden Ausgleichungen für Koordinatenumformungsverfahren so definiert, dass sie elastische Elemente nutzen, die sich nach physikalischen Gesetzen verformen.

Ein großer Gewinn des Einsatzes der Elastizität auf Seite der Ausgleichung ist das durch die physikalischen Gesetze vorgegebene Verhalten der elastischen Elemente. Das einzelne Element führt aus Sicht der Gesamtbilanz, die für das ganze Umformungsgebiet betrachtet wird, eine minimale Formänderung durch. Bei der elastischen Verformung wird beim Übergang nach ETRS89/UTM infolge der durch Netzspannung verursachten äußeren Kräfte insgesamt minimale Energie aufgewendet. Das dahinterstehende physikalische Gesetz ist das Prinzip der minimalen Formänderungsenergie.

### 2.1 Einordnung des Koordinaten-Umformungsverfahrens Ortra und historischer Abriss über Kartenhomogenisierungsansätze

Seit Beginn des 20. Jahrhunderts ist die Analogie zwischen einem geodätischen Streckennetz und einem Fachwerk bekannt (siehe z.B. Westergaard 1915). Seit dieser Zeit werden Rechenverfahren der Ausgleichungsrechnung mechanisch gedeutet, wie z.B. Streckennetze als Fachwerke (Linkwitz 1960), und elastische Seilnetze oder mechanische Strukturen, wie Tragwerke oder verformte Balken, mit Hilfe der Ausgleichungsrechnung berechnet (Linkwitz 1977, Bahndorf 1991, Ströbel 1995).

Während der Forschungstätigkeit des an der Universität Stuttgart gegründeten Sonderforschungsbereichs 64 (SFB 64) »Weitgespannte Flächentragwerke« wird von Linkwitz et al. (1987) für den Bereich Stabwerke nachgewiesen, dass die in der Statik bekannten Kraft- und Weggrößenverfahren wichtige Entsprechungen bei der Ausgleichungsrechnung haben: Das *Weggrößenverfahren* entspricht direkt der vermittelnden Ausgleichung, das *Kraftgrößenverfahren* der bedingten Ausgleichung (siehe auch z.B. Bahndorf 1991, Ströbel 1995).

Ein weiterer Forschungsbereich, der theoretische Grundlagen für moderne Koordinatenumformungsverfahren bereitstellt, ist der Forschungsbereich der Kartenhomogenisierung.

Der bei der Lagenetzausgleichung angewandte Ansatz des Strecken- und Richtungsnetzes stellte vor ca. 20 Jahren die theoretische Basis des klassischen Karten-Homogenisierungsansatzes dar, der in der ursprünglichen Anwendung für manuell digitalisierte Bereiche Pseudobeobachtungen im jeweiligen Ausgangskoordinaten- system für die Digitalisierung definiert, um sie in ein übergeordnetes, homogenes System mit vereinheitlichter Genauigkeit zu integrieren. Ende der 1980er und Anfang der 1990er Jahre wurden mehrere Arbeiten über Ansätze der Kartenhomogenisierung von Benning und Scholz (1990), Rose (1988) und Hampp (1992) veröffentlicht. Hampp hat in den 1990er Jahren die numerische Homogenisierung bei der Bayerischen Vermessungsverwaltung für den Aufbau der Daten der Digitalen Flurkarte entwickelt, die über mehrere Jahre vor Anwendung des numerisch exakten Ansatzes verwendet wurde.

Klassische Kartenhomogenisierungsverfahren haben den Nachteil, dass diese nicht immer robust gegenüber äußeren Kräften sind, wodurch Topologiefehler auftreten können.

Die Ausgleichung eines Streckennetzes weist als elastisches Verfahren, das eine unmittelbare Analogie zu einem statischen Fachwerk besitzt (Linkwitz 1960), eine minimale Streckenverzerrung auf. Diese kann durch minimale Formänderung der Fachwerksstäbe, der elastischen Basiseinheiten, erklärt werden, die aus Sicht der Geodäsie zu minimalen Streckenabweichungen zwischen GK und UTM führen. Verfahren, die die Abbildungseigenschaft einer minimalen Streckenverzerrung besitzen, werden in der geodätischen Praxis jedoch kaum angewendet.

Die Idee, ein Kartenhomogenisierungsverfahren als Umformungsverfahren für den Übergang nach ETRS89/UTM einzusetzen, wurde zuletzt von Benning und Scholz (2010) vorgeschlagen. Wegen den sich in der Umsetzung ergebenden langen Prozessierungszeiten wurde als Gebietseinheit nur eine Gemarkung nach UTM überführt. Die rechnerische Homogenisierung dieser Gemarkung mittels KATHOM, siehe z.B. (Kampshoff und Benning 2005), dem an der RWTH Aachen entwickelten Ausgleichungssystem zur Homogenisierung von Karten, betrug 2010 einen knappen Tag, der Gesamtprozess einschließlich des Aufbaus der GIS-Fachdatenbank insgesamt vier Tage. Damit wurde die größte Herausforderung für die Anwendung des Ansatzes für größere Gebietseinheiten deutlich: die Massenproblematik.

Benning und Scholz (2010) zeigten darüber hinaus, dass durch wenige theoretische Festlegungen im funktionalen Ansatz ein Kartenhomogenisierungsverfahren zu einem Umformungsverfahren umfunktioniert werden kann.

Basis der Beobachtungsgleichungen können Punkte der zu überführenden Grundrisse sein, die über Dreiecksvermaschung in nachbarschaftliche Beziehung gebracht werden (Kampshoff und Benning 2005). Die Dreiecksvermaschung wird ebenfalls zum Aufbau der elastischen Dreiecke im Membranansatz von Gielsdorf und Gründig (1997) angewendet. Auf der anderen Seite kann die Defi-

nition von Beobachtungsgleichungen durch vollständige Nachbildung der Original-Grundrisslemente mit gleichzeitiger Versteifung der Flächengeometrien durch weitere Linienbeobachtungen erfolgen (Hampp und Glock 2017).

### 3 Der Aufbau des Ortra-Verfahrens und das mathematische Beobachtungsmodell

Für die Umstellung des Liegenschaftskatasters nach ETRS89/UTM in Bayern werden beim Ortra-Ansatz nacheinander Pseudobeobachtungen für die ALKIS-Objektbereiche Flurstücke, Gebäude und Bauwerke aufgebaut.

Für den zuletzt genannten Objektbereich Bauwerke werden in Bayern kleinere bauliche Anlagen z.B. Denkmäler, Brunnen, Treppen und Mauern erfasst.

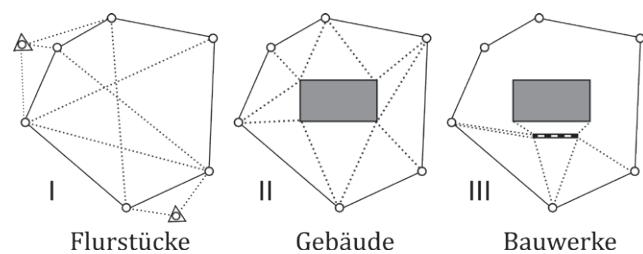


Abb. 1: Hierarchischer Ansatz beim Ortra-Verfahren

Für die Überführung dieser Objektbereiche nach UTM wird ein Ansatz mit einer hierarchischen Netzverdichtung verfolgt. Die hierarchische Netzverdichtung ist dadurch gekennzeichnet, dass Punkte einer vorherigen Ausgleichung als fehlerfreie identische Punkte in die folgende Ausgleichung eingeführt und für die Definition von Beobachtungen verwendet werden (Abb. 1).

Bei der UTM-Umstellung des Liegenschaftskatasters in Bayern wird der Objektbereich »Angaben zum Flurstück« als erstes nach UTM umgeformt, da dieser ALKIS-Objektbereich die höchste rechtliche Relevanz besitzt.

Danach folgt als zweites auf Basis der Ergebnisse der vorhergehenden Ausgleichung die Ausgleichung für Gebäude, die zusätzlich die nach UTM überführten Flurstücksgrenzpunkte – neben den Katasterfestpunkten – als identische Punkte bei Anschlussbeobachtungen verwendet. Analog kann die dritte Ausgleichung für Bauwerke die Ergebnisse der vorhergehenden Ausgleichungen für ihre Beobachtungsdefinitionen nutzen (Abb. 1).

Die Abb. 2 zeigt beispielhaft für die zu Beginn des hierarchischen Ansatzes durchgeführte Ausgleichung für Flurstücke, wie die Definition von Pseudobeobachtungen zur Vernetzung des Grundrisses erfolgt.

In Abb. 3 ist dargestellt, dass beim Ortra-Verfahren für jeden zu überführenden Punkt die lokalen Strecken- und Winkelbeziehungen zu seinen Punktnachbarn in einem lokalen Koordinatensystem (Ortra-Kleinsystem) abgebildet werden. Dieses System kann sich beim Übergang nach ETRS89/UTM elastisch dehnen oder stauchen.

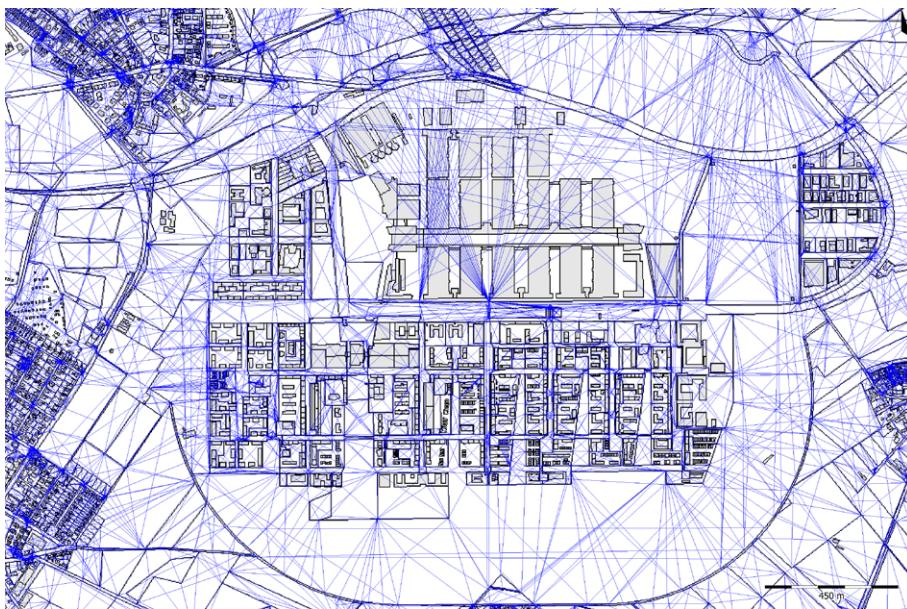


Abb. 2: Definition von Pseudobebobachtungen für den ALKIS-Objektbereich Flurstücke. Beispiel aus München, Messegelände Riem

Aus der Sicht der Mechanik außerhalb einer Formänderungsbilanz kann das elastische Ortra-Kleinsystem zusätzlich eine Starrkörperbewegung und eine Drehung durchführen.

Innerhalb des lokalen Koordinatensystems werden die Winkel zwischen den durch Beobachtungen orthogonalen Art einbezogenen Punkten mit minimalen Abweichungen nach UTM überführt. Beim Übergang nach UTM erhalten diese Winkel kleine Richtungszuschläge, die durch die Restklaffungen verursacht werden. Bei seiner Anwendung als Überführungsansatz zwischen zwei konformen Abbildungssystemen, dem GK- und dem UTM-Koordinatensystem, ist allgemein beim Ortra-Ansatz zu beobachten, dass die Größenordnungen der Restklaffungen, die bei der Verkettung der Ortra-Kleinsysteme auftreten, klein von zweiter Ordnung sind.

Dies ist damit zu erklären, dass eine ebene lokale Koordinatentransformation bereits eine lineare konforme Abbildung darstellt, z. B. eine Ähnlichkeitstransformation oder beim Ortra-Ansatz eine verkettete Helmerttransformation. Für den lokalen Nachbarschaftsbereich, der in

ein Ortra-Kleinsystem durch Beobachtungen einbezogen wird, verursachen Abweichungen in den Abbildungen zwischen UTM und GK nur minimale Abbildungswidersprüche, die in kleinen Restklaffungen resultieren. Lenzmann et al. (1997) haben in diesem Zusammenhang nachgewiesen, dass bei einer Abbildung zwischen zwei konformen Koordinatensystemen der Helmerttransformationsansatz bis auf Terme zweiter Größenordnung einer konformen Abbildung entspricht, unabhängig von der Größe des abgebildeten Bereichs.

In Abb. 2 wird dargestellt, wie der Flurstücksgrundriss durch Definition von weiteren Querverbindungen nochmals verstiftet

wird. Bei der Definition von Pseudobebobachtungen wird vermieden, durch zu viele Beobachtungen eine zu große Steifigkeit im Netz aufzubauen.

Die für jeden zu überführenden Punkt gebildeten lokalen Koordinatensysteme werden zu einer Gesamtheit eines sich statisch verhaltenden geodätischen Netzes verkettet, bei dem sich zwischen äußeren und inneren Kräften ein Gleichgewicht einstellt. Damit ist gemeint, dass sich das bei dem Ortra-Ansatz gebildete geodätische Netz ähnlich wie ein Fachwerk verhält, bei dem Kräfte als äußere Lasten auf Fachwerksknoten oder in Ausnahmefällen Fachwerksbalken einwirken. Das Fachwerk behält jedoch durch Gegenwirken innerer Balkenkräfte, nach dem dritten Newton'schen Gesetz *Actio gleich Reactio* in entgegengesetzter Richtung der äußeren Kräfte, das vorher vorhandene Kräftegleichgewicht.

Für den in Hampp und Glock (2017) als Ortra-Ansatz bezeichneten Transformationsansatz existiert bundesweit auch der Begriff der verketteten Helmerttransformation. Die Einführung des Verfahrens der verketteten Helmerttransformation in Deutschland in den 1960er Jahren wird Kraus (1966) zugeschrieben.

In Verbindung mit dem Aufkommen der freien Stationierung bei der Punktbestimmung mit elektrooptischen Tachymetersystemen (z. B. Reg Elta 14) wurde dieses Verfahren an der Universität Stuttgart durch Krack (1977) auf den Einsatz umfangreicher tachymetrischer Aufnahmen untersucht. Seit den 1980er Jahren wurde das Verfahren der verketteten Helmerttransformation bei der Bayerischen Vermessungsverwaltung in der Katasterphotogrammetrie als Transformationsverfahren eingesetzt.

In Verbindung mit moderner Sparse-Matrizen-Technologie zur Auflösung der großen Gleichungssysteme erlebt das Verfahren der verketteten Helmerttransformation im Projekt KanU mit der methodischen Weiterentwicklung zur spezifischen Überführung unterschiedlicher Objekt-

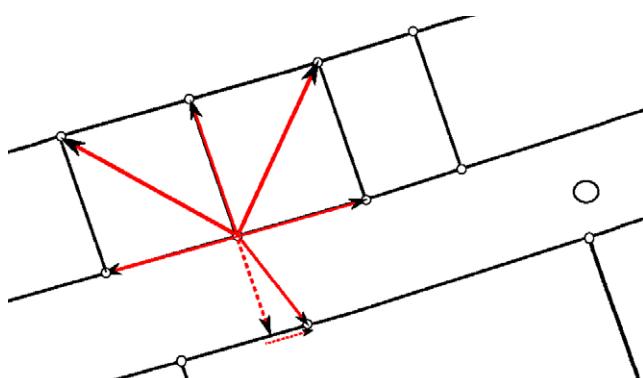


Abb. 3: Definition eines Ortra-Kleinsystems: Der Grundriss wird durch Linienbeobachtungen vollständig nachgebildet und durch weitere Beobachtungen verstiftet.

bereiche als für ganz Bayern einsetzbares Umformungsverfahren eine Renaissance.

Insgesamt werden in Bayern bei der Ausgleichung des Liegenschaftskatasters und der ausgleichungstechnischen Erzeugung der NTv2-Datei für den Kundentransformationsansatz große Gleichungssysteme mit insgesamt ca. 3,5 Milliarden Beobachtungen aufgebaut.

Die Transformationsergebnisse der Ausgleichungen stehen für den Aufbau des Amtlichen Liegenschaftskataster-Informationssystems (ALKIS) im neuen Raumbezug ETRS89/UTM zur Verfügung. Die Ergebnisse der danach ausgeführten Ausgleichung für die Bestimmung der Gitterpunkte des NTv2-Ansatzes werden in Form von engmaschigen NTv2-Gitterdateien gegen Ende des Umstellungszeitraums des Liegenschaftskatasters bereitgestellt. Damit können die Fachkunden die Überführung ihrer Geofachdaten mit Katasterbezug nach ETRS89/UTM durchführen (Glock und Birkenbeul 2018).

Die Flurstücke werden als erstes nach ETRS89/UTM überführt, damit diese den dann bereits homogenisierten Grundrissrahmen im neuen Raumbezug für weitere Ausgleichungen repräsentieren.

Die Grundformeln des Ortra-Ansatzes mit den lokalen Beziehungen zwischen GK- und UTM-Koordinaten im lokalen Ortra-Kleinsystem lauten:

$$\begin{aligned} E_2 &= E_1 + o_1(x_2 - x_1) + a_1(y_2 - y_1), \\ N_2 &= N_1 + a_1(x_2 - x_1) - o_1(y_2 - y_1). \end{aligned} \quad (1.1)$$

In Formel (1.1) werden die UTM-Koordinaten als (E, N) und die Gauß-Krüger-Koordinaten als (y, x) eingeführt, die Indizes bei den Koordinaten weisen auf die zugehörige Punktnummer hin und kennzeichnen zusätzlich bei den Transformationsparametern  $a$  und  $o$ , welcher Punkt jeweils Ursprung des Ortra-Systems ist.

Die dazugehörigen, in der Ausgleichung definierten Verbesserungsgleichungen lauten:

$$\begin{aligned} 0 + \hat{\nu}_{E_2} &= \hat{E}_1 + \hat{o}_1(x_2 - x_1) + \hat{a}_1(y_2 - y_1) - \hat{E}_2, \\ 0 + \hat{\nu}_{N_2} &= \hat{N}_1 + \hat{a}_1(x_2 - x_1) - \hat{o}_1(y_2 - y_1) - \hat{N}_2. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Die mit GNSS bestimmten, identischen Punkte stellen den Koordinatenreferenzrahmen ETRS89 dar, in den das durch Pseudobeobachtungen erzeugte Lagenetz eingespannt wird. Die identischen Punkte gehen als direkte Beobachtungen in die Verbesserungsgleichungen ein, die wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned} E_i + \hat{\nu}_{E_i} &= \hat{E}_i, \\ N_i + \hat{\nu}_{N_i} &= \hat{N}_i. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Für die Umformung der Flurstücke können in Bayern über 880.000 GNSS-bestimmte Punkte als identische Punkte verwendet werden.

In einer nachgeordneten Netzverdichtungsausgleichung können die Gebäude die nach UTM überführten

Flurstücksgrenzpunkte als zusätzliche identische Punkte neben den GNSS-bestimmten Lagefestpunkten nutzen (siehe Abb. 1). Bei der Gebäudeausgleichung erfolgt eine Einpassung der Gebäude in den bereits homogenisierten Grundrissrahmen der Flurstücke. Keine Beeinträchtigung der Transformationsgenauigkeit bewirken Flurstücksgrenzen, die auf den ersten Blick das hierarchische Prinzip verletzen, weil Sie Gebäude schneiden. Aus Sicht der Gebäudevernetzung finden die innenliegenden Grenzen der Flurstücke, auf denen das Gebäude liegt, keine Berücksichtigung und es werden ausschließlich Beobachtungen zu äußeren Flurstücksgrenzen aufgebaut, die vom Gebäude in Verlängerung der Gebäudelinie liegen.

Für die Gebäudeausgleichung wurden drei verschiedene Vernetzungsarten entwickelt:

- Gebäudeinnenvernetzung,
- Gebäudeaußenvernetzung,
- Gebäudezwischenvernetzung.

Eine ausführliche Beschreibung der Gebäudevernetzungsarten, ihre Funktion innerhalb der Gebäudeausgleichung sowie eine vertiefte Darstellung der Flurstücksvernetzung mit den Flurstücksgrenzbeobachtungen und versteifenden Beobachtungen findet sich in Glock und Birkenbeul (2018) sowie in Hampp und Glock (2017).

#### 4 Analogie zwischen dem Ortra-Verfahren und einem Weggrößenverfahren der Baustatik

Zunächst wird eine Analogie zwischen einer vermittelnden Ausgleichung und einem Weggrößenverfahren aufgebaut. Ein Weggrößenverfahren ist ein Verfahren der Baustatik, das bei einem statischen Tragwerk, z.B. einem Brückenbauwerk mit verschiedenen Tragwerkselementen, die Bestimmung von Verformungen ermöglicht.

In folgenden Gleichungen für das Weggrößenverfahren (Kräitzig 1998, Ströbel 1995)

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{p} \quad \text{bzw.} \\ \mathbf{r} &= (\mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{p} + \mathbf{A}^T \mathbf{K} \mathbf{v}_v) \end{aligned} \quad (1.4)$$

können Knotenverschiebungen  $\mathbf{r}$  in Abhängigkeit von Kräften  $\mathbf{p}$  bestimmt werden. Die in (1.4) für den Aufbau des funktionalen Zusammenhangs zwischen Kraft  $\mathbf{p}$  und Knotenverschiebung  $\mathbf{r}$  zur Anwendung kommenden Matrizen  $\mathbf{K}$  und  $\mathbf{A}$ , die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  und die Gleichgewichtsmatrix  $\mathbf{A}$ , werden im folgenden Abschnitt eingeführt.

Die Knotenverschiebungen sind von außen sichtbare Auswirkungen von innerhalb des Elementes stattfindenden Verformungen, die durch äußere Kräfte verursacht werden. Der Zusammenhang zwischen Verformungen  $\mathbf{v}$  und äußeren Kräften  $\mathbf{p}$  hat Kräitzig (1998) mit folgenden zwei Sätzen prägnant wiedergegeben:

Verformung = Nachgiebigkeit  $\times$  Kraft

und

Kraft(größe) = Steifigkeit  $\times$  Verformung.

Die obere Gleichung von (1.4), die Grundgleichung des Weggrößenverfahrens, berücksichtigt keine Vorverformungen (z.B. Temperaturverformungen). Diese werden in der unteren Gleichung von (1.4) als erweiterte Formel des Weggrößenverfahrens im Term  $A^t K v$  eingeführt, um einen direkten Vergleich zu einem in der Geodäsie vertrauten formelmäßigen Aufbau der vermittelnden Ausgleichung

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (1.5)$$

geben zu können.

Die obere Gleichung von (1.4) kann sowohl als Anwendung der Baustatik als auch als Anwendung der Geodäsie gesehen werden:

- In der Baustatik können bei Tragwerksberechnungen im Vektor der Kräfte  $\mathbf{p}$  die Kräfte von Einzellasten (Punktlasten) definiert sein, mit denen ein Tragwerk belastet wird.
- Bei Anwendung auf eine geodätische Netzausgleichung können im Vektor der Kräfte  $\mathbf{p}$  die Einzelkräfte zusammengefasst sein, die jede für sich auf einen identischen Punkt einwirken können (Prinzip ein Punkt – eine Kraft). Eine Einzelkraft verschiebt nicht nur den identischen Punkt mit seiner nächsten Nachbarschaft, sondern erzeugt wegen den variierenden Verschiebungen auch darüber hinaus Verzerrungen in der Geometrie der Nachbarschaft.

Ausschließlich unter Anwendung von drei Grundgleichungen der Statik, der Gleichgewichtsbedingungen, der Werkstoffgleichungen und der kinematischen Beziehungen, können im Weggrößenverfahren innere und äußere Kraft- und Weggrößen bestimmt werden.

In der Statik versteht man unter dem Gleichgewicht den Zustand, in dem sich innerhalb eines statischen Systems die inneren Kräfte  $\mathbf{s}$  und äußeren Kräfte  $\mathbf{p}$  im Gleichgewicht befinden. Die Gleichgewichtsbeziehungen zwischen inneren und äußeren Kräften werden über die Gleichgewichtsmatrix  $\mathbf{A}$  wie folgt ausgedrückt:

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{s} \quad (\text{Gleichgewicht}). \quad (1.6)$$

Die Werkstoffgleichungen beschreiben, wie sich ein Werkstoff bei Vorliegen von inneren Kräften verformt. Die inneren Kräfte liegen in den Grundgleichungen als Stabkräfte  $\mathbf{s}$  vor, die als Resultierende der inneren Kräfte definiert sind. Die auf eine Flächeneinheit bezogene innere Kraft wird auch als Spannung bezeichnet.

Bei der linearen Elastizitätstheorie wird angenommen, dass sich das Material bei äußerer Belastung linear-elastisch verhält und die elastische Verformung durch das Hooke'sche Gesetz beschrieben werden kann. Die Steifig-

keit kann als Widerstand eines Elementes gesehen werden, mit dem das Element bei Belastung der Verformung entgegenwirkt. Die Steifigkeitsmatrix stellt die Beziehung zwischen Elementverformungen  $\mathbf{v}$  und Stabkräften  $\mathbf{s}$  wie folgt her:

$$\mathbf{s} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} \quad (\text{Werkstoff}). \quad (1.7)$$

Die Kinematik definiert innerhalb der Statik die Verformungsgeometrie der Verzerrungen. Die kinematische Verträglichkeit, auch als geometrische Verträglichkeit bezeichnet, wird anhand eines Fachwerkstabs erklärt: Die kinematische Verträglichkeit legt fest, dass die Verlängerung bzw. Elementverformung des Fachwerkstabs (= innere Weggröße) mit den Knotenverschiebungen (= äußere Weggrößen) der Anfangs- und Endpunkte des Fachwerkstabs geometrisch in Einklang steht. Für den formelmäßigen Ausdruck der kinematischen Verträglichkeit, der zwischen Elementverformungen  $\mathbf{v}$  und Knotenverschiebungen  $\mathbf{r}$  aufgebaut wird, kommt wieder die Gleichgewichtsmatrix  $\mathbf{A}$  von (1.4) bzw. (1.6) zur Anwendung:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r} \quad (\text{Kinematik}). \quad (1.8)$$

Ausgangspunkt der Herleitung des Weggrößenverfahrens und eines analogen Ausgleichungsverfahrens werden Energiegleichungen sein, die in integraler Form die drei vorgestellten Grundgleichungen der Mechanik zusammenfassen.

Der Aufbau der Analogie zur Mechanik ist möglich, da sowohl das Weggrößenverfahren als auch die vermittelnde Ausgleichung auf übertragbaren Minimalprinzipien basieren. Für das Weggrößenverfahren ist der mathematische Ausgangspunkt eine minimale Energiegleichung, die das Prinzip der minimalen mechanischen Formänderung formuliert. Für die Ausgleichung ist der Ausgangspunkt das bekannte Minimalprinzip der kleinsten Quadrate.

Für das Minimalprinzip der mechanischen Gesamtenergie  $\Pi_{\text{gesamt}}$ ,

$$\Pi_{\text{gesamt}} = \frac{1}{2} \mathbf{v}^t \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{r}^t \mathbf{p} \Rightarrow \text{stat}. \quad (1.9)$$

die aus den beiden Energieanteilen  $\Pi_i = \frac{1}{2} \mathbf{v}^t \mathbf{K} \mathbf{v}$  für innere und  $\Pi_a = \mathbf{r}^t \mathbf{p}$  für äußere Energie besteht, wird eine zusätzliche Nebenbedingung mit Hilfe der aus der Ausgleichungsrechnung bekannten Lagrange'schen Korrelaten definiert. Die Nebenbedingung führt eine kinematische Verträglichkeit zwischen der Elementverformung  $\mathbf{v}$  und der Knotenverschiebung  $\mathbf{r}$  ein.

Der mit der Nebenbedingung (Kinematik) ergänzte Ausdruck (1.9) wird

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{v}^t \mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{s}^t (\mathbf{v} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}^t \mathbf{p} \Rightarrow \text{stat}. \quad (1.10)$$

Die partiellen Ableitungen von  $\Pi$  nach den unbekannten Knotenverschiebungen  $\mathbf{r}$ , Elementverformungen  $\mathbf{v}$  und

Stabkräften  $s$  ergeben Ausdrücke für das Gleichgewicht, das Werkstoffgesetz und die kinematische Verträglichkeit, die, wie folgt, gegenseitig eingesetzt werden können (Kräitzig 1998):

$$\begin{aligned} p &= A^t s, \\ s &= K v, \\ v &= A r. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Daraus kann die Beziehung

$$p = (A^t K A) r \quad (1.12)$$

gewonnen werden. Die linksseitige Multiplikation mit  $(A^t K A)^{-1}$  führt zur Gleichung

$$r = (A^t K A)^{-1} p, \quad (1.13)$$

die den für die Netzausgleichung der Geodäsie wichtigen Zusammenhang zwischen Kräften und Knotenverschiebungen herstellt. Später werden Knotenverschiebungen als Koordinatenwidersprüche gedeutet, sodass die Gleichung (1.13) auch den Zusammenhang zwischen Kräften und Koordinatenwidersprüchen wiedergibt.

#### 4.1 Herleitung der erweiterten vermittelnden Ausgleichung

Zur Vorbereitung des erweiterten Verfahrens wird für den Standardfall der vermittelnden Ausgleichung (1.5) das Prinzip der kleinsten Quadrate unter der Nebenbedingung  $I + v - f(x)$  eingeführt. Die Nebenbedingung drückt aus, dass das funktionale Modell widerspruchsfrei zu den ausgeglichenen Beobachtungen sein soll. Die Gleichung für den Standardfall lautet:

$$\Pi = v^t P v - 2k^t (I + v - f(x)) \Rightarrow \text{stat.} \quad (1.14)$$

In (1.14) kommt mit der Matrix  $P$  die Gewichtsmatrix zur Anwendung. Für die Funktion  $f(x)$  soll im Folgenden gefordert werden, dass sie eine Funktion der unbekannten Koordinaten  $x$  darstellt.

Die in (1.14) vorliegende Gesamt-Stationärsbeziehung  $\Pi$  ist Basis für die erweiterte Ausgleichung. Für die Erweiterung kommt ein zusätzlicher mechanisch definierter Anteil zur Gesamt-Stationärsbeziehung  $\Pi$  hinzu, der äußere Kräfte einführt. Dieser zusätzliche Anteil wird so formuliert, dass die verrichtete Arbeit  $-W_a = \Pi_a$  der äußeren Kräfte  $p$  auf den Verschiebewegen der Knotenverschiebungen minimal sein soll.

Die Knotenverschiebung  $r = x - x_0$  wird als Differenz der Koordinate  $x$  eines (Netz-)Knotens nach der elastischen Verschiebung minus der Koordinate  $x_0$  des Knotens vor der Verschiebung definiert.

Der mit der verrichteten Arbeit erweiterte Ausdruck (1.14) wird (Bahndorf 1991, Ströbel 1995):

$$\Pi = v^t P v - 2k^t (I + v - f(x)) + 2(-p^t (x - x_0)) \Rightarrow \text{stat.} \quad (1.15)$$

Eine erste Analogie wird deutlich, wenn in Gleichung (1.15) der mittlere Term  $-2k^t (I + v - f(x))$  für die Nebenbedingung herausgenommen wird. Dadurch erhält man sofort den – bis auf die Steifigkeitsmatrix  $K$  – analogen Energieausdruck von (1.9) für die Stationarität der inneren und äußeren Energie. Die bei der Ausgleichungsrechnung zur Anwendung kommende Gewichtsmatrix  $P$  kann damit aus Sicht der Mechanik als eine zur Steifigkeitsmatrix  $K$  analoge Matrix gesehen werden, die in gleicher Funktion wie die Steifigkeitsmatrix  $K$  die Größe und Geometrie der geodätischen Verbesserungen  $v$  (= Elementverlängerung oder -verkürzung) beeinflusst.

Zur vertieften Analogiebetrachtung werden in folgender Gleichung (1.16) die in der Ausgleichung gebräuchlichen Matrizenbezeichnungen aus (1.15) durch die in der Baustatik verwendeten Matrizenbezeichnungen ersetzt:

$$\Pi = v^t K v - 2s^t (I + v - f(x)) + 2(-p^t (x - x_0)) \Rightarrow \text{stat.} \quad (1.16)$$

Der zur Formulierung der Nebenbedingung verwendete Korrelatenvektor  $k$  (1.15) wird in Gleichung (1.16) durch den Vektor der Stabkräfte  $s$  ausgetauscht. Dieser erhält dadurch neben seiner mathematischen eine physikalische Bedeutung.

Zur Bestimmung des Minimums von (1.16) werden wieder die partiellen Ableitungen von  $\Pi$  nach den unbekannten Koordinaten  $x$ , den Elementverformungen  $v$  und den Korrelaten  $k$  gebildet und zu Null gesetzt.

Für die partiellen Ableitungen erhält man wieder mit  $p = A^t \cdot s$  die Gleichgewichtsbedingungen und das Werkstoffgesetz  $s = K \cdot v$ . Als weitere partielle Ableitung erhält man das funktionale Modell der Ausgleichung  $-2k^t (I + v - f(x))$ .

Durch die weitere Eliminierung der Stabkräfte  $s$  ergibt sich schließlich:

$$A^t P v = p. \quad (1.17)$$

Für die Variable  $v$  in Gleichung (1.17) wird  $v = f(x) - I$  eingesetzt und nach weiterer Rechnung erhält man

$$\Delta x = (A^t P A)^{-1} (p + A^t P (I - f(x_i))), \quad (1.18)$$

wenn die Funktion  $f(x)$  an der Entwicklungsstelle  $f(x_i)$  mit  $x_i$  als Näherungswert für die Unbekannten in einer Taylorreihe unter Vernachlässigung höherer Glieder entwickelt wird. Der Index  $i$  bei  $x_i$  kennzeichnet, dass der Näherungswert aus einer Iteration im Iterationsschritt  $i$  bestimmt wurde.

Aus (1.18) lässt sich ein iteratives System für ein nicht-lineares Ausgleichungsverfahren aufbauen:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = (A^t P A)^{-1} (p + A^t P (I - f(x_i))). \quad (1.19)$$

Die Unbekannte  $x_i$  wird berechnet, indem der Unbekann-tenzuschlag  $\Delta x_i$  im Iterationsschritt  $i$  zu der davor ermit-telten Unbekannten  $x_{i-1}$  addiert wird.

Das mit externen Kräften erweiterte vermittelnde Aus-gleichungsverfahren (1.19) ist dem Weggrößenverfahren für Vorverformungen (untere Gleichung von 1.4) analog.

## 5 Identifizierung von Elementverformungen und Knotenverschiebungen beim Ortra-Ansatz

Zur Anwendung des Weggrößenverfahrens oder zur Anwendung der mit der Funktionalität der minimalen Formänderungsenergie erweiterten Ausgleichung (1.19) sind die Elementverformungen  $v$  und Knotenverschie-bungen  $r$  in den Ergebnissen der Ortra-Ausgleichung zu identifizieren.

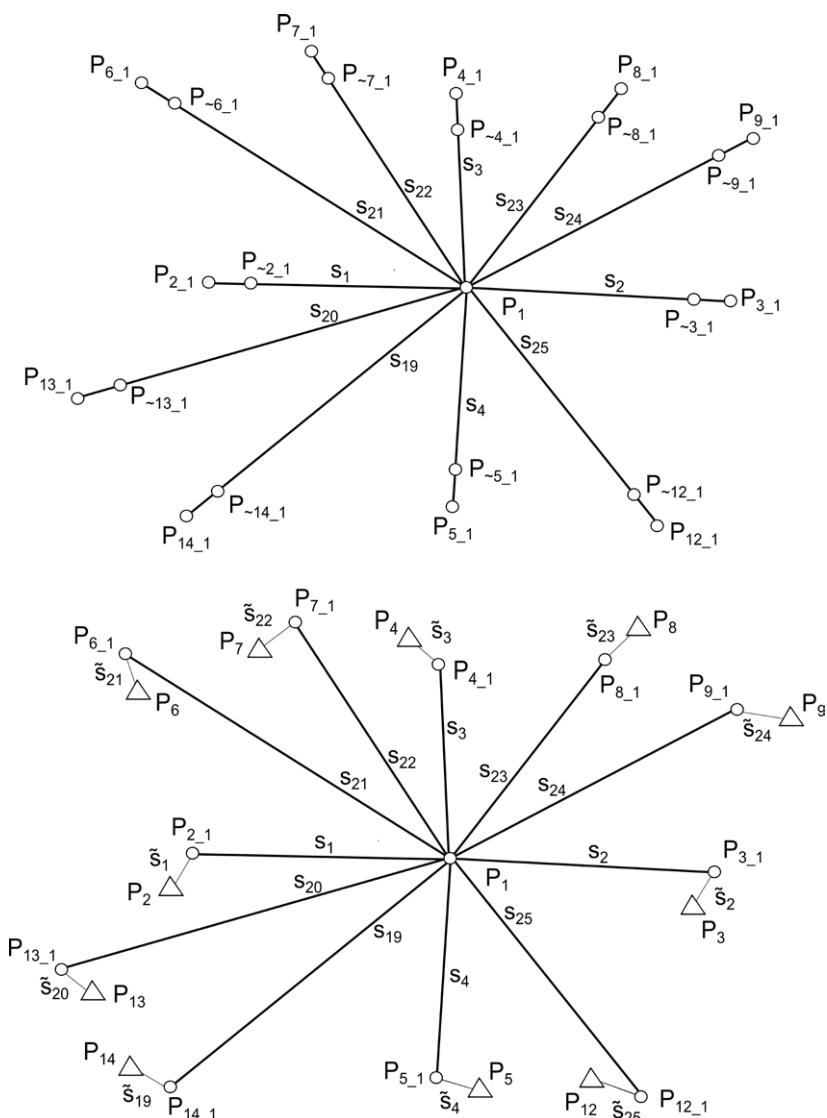


Abb. 4: Elementverformungen  $v$  eines einzelnen Ortra-Systems mit primären Knotenverschiebungen (oben) und Darstellung der in den Restklaffungen liegenden Kräfte, die sekundäre Knotenverschiebungen verursachen (unten).

Da mit dem Ursprung des Ortra-Systems alle Stäbe einen gemeinsamen Stabfangspunkt besitzen, der kei-ne individuelle Knotenverschiebung durchführen kann, werden die elastischen Elementverformungen  $v$  auf die Stabenden bezogen (Abb. 4 oben). Die Knotenverschie-bung  $r$ , die als äußere Weggröße zu der inneren Weggrö-Be Elementverformung  $v$  korrespondiert, kann als Ver-schiebung zwischen dem Stabende im unverformten und dem Stabende im verformten System definiert werden.

Die bei den einzelnen Stäben eines Ortra-Systems vorliegenden Elementverformungen  $v$  können aus dem Maßstab  $m$ , den Abszissen- und Ordinatendifferenzen und den Transformationsparametern  $a$  und  $o$  des Ortra-Systems abgeleitet werden. Die Lage des Endknotens des unverformten Ortra-Systems in der aktuellen verformten Konfiguration, für die im Weiteren der Begriff Mo-mentankonfiguration verwendet werden soll, berechnet sich für einen Stab mit dem Anfangspunkt  $P_1$  und End-punkt  $P_2$  zu:

$$E_{P_2} = E_{P_1} + \frac{o \cdot (x_{P_2} - x_{P_1}) + a \cdot (y_{P_2} - y_{P_1})}{m},$$

$$N_{P_2} = N_{P_1} + \frac{a \cdot (x_{P_2} - x_{P_1}) - o \cdot (y_{P_2} - y_{P_1})}{m}. \quad (1.20)$$

Zusätzlich müssen zwischen den Ortra-Systemen sekundäre, elastisch nicht begründete Knotenverschiebungen definiert werden. Als Sekundärverschiebung wird die Verschiebung des Stabendkno-tens in den Ursprung des gekoppelten Ortra-Systems definiert. Den Sekundär-knotenverschiebungen werden Stäbe zu-geordnet, die das Ortra-Kleinsystem im Verbund der benachbarten Ortra-Syste-me im Gleichgewicht halten (Abb. 4).

Die Sekundärverschiebung kann mit der kinematischen Verträglichkeit der Verformungen der elastischen Basis-einheiten, den Ortra-Systemen, erklärt werden. Die kinematische Verträglich-keit muss beim Ortra-Ansatz zu zusätzlichen Verschiebungen in Verbindung mit Druck- oder Zugstäben im Gesamt-system führen, damit bei Verformungen das statische Gesamtsystem erhalten bleibt. Da es zu elastischen Längenände-rungen von Ortra-Systemen im gesamten System kommt, die theoretisch nur durch eine einzelne Last ausgelöst wer-den können, ist die Sekundärverschie-bung, zusätzlich zu der kinematischen Funktion, aus geometrischer Sicht ein sich im gesamten System einstellender minimaler geometrischer Widerspruch.

Dieser kann aufgrund der relativ starren Einzelsysteme nicht verhindert werden, da die Ortra-Systeme nur ein eingeschränktes Verformungsverhalten einer Dehnung oder Stauchung besitzen.

Bei Anwendung des Weggrößenverfahrens mit den definierten Weggrößen zeigen sich in jedem Stab gleiche Kräfte, die radial vom Ursprung nach außen zeigen (bei  $m > 1$ ). Die radialen Kräfte können als vorhandene Vorspannungen in der Referenzkonfiguration gedeutet werden. Das Ortra-System ist in der unverformten Konfiguration zwischen den Ursprüngen der gekoppelten Ortra-Systeme eingezwängt und steht durch eine falsche Ablängung der Stäbe, die proportional zur jeweiligen Stablänge ist, unter Vorspannung.

## 6 Erreichung des Drehmomenten- und Kräftegleichgewichts bei den Sekundärverschiebungen

Durch Nachweis des Momenten- und Kräftegleichgewichts bei den Sekundärverschiebungen wird insgesamt der Nachweis erbracht, dass es sich bei den verketteten Ortra-Systemen um ein statisches System handelt, das sich im Gleichgewicht befindet.

Die Elementverformungen werden mit Vorspannung des Ortra-Systems und Einspannung zwischen den benachbarten Ortra-Systemen in der Referenzkonfiguration erklärt.

Die von den Kräften über den Verschiebeweg verrichtete Arbeit ist der Teilbetrag oder Gesamtbetrag der elastischen Verformungsarbeit des Ortra-Systems, das seine Vorspannung abbaut. Für die weiteren Überlegungen ist es unkritisch, entweder einen teilweisen oder vollständigen Abbau der Vorspannung oder auch eine Mischform anzunehmen. Der rechnerischen Ermittlung eines nicht vollständigen Abbaus der Vorspannung bei einzelnen Ortra-Systemen kann durch Einführung von zusätzlichen Unbekannten in dem aufzubauenden Gleichungssystem entsprochen werden.

Für die weitere Berechnung der Sekundärverschiebungen wird angenommen, dass alle Ortra-Systeme keine weiteren Kräfte nach Abbau der Vorspannung an die Zug- oder Druckstäbe der Sekundärverschiebungen übertragen.

Für die Überprüfung des Drehmomenten- und Kräftegleichgewichts des Gesamtsystems wird zunächst untersucht, ob sich das einzelne Ortra-System in einem Drehmoment- und Kräftegleichgewicht befindet. Danach wird untersucht, inwieweit die gleichen, nun auf gekoppelte benachbarte Ortra-Systeme bezogenen Kräfte, die hinter den Sekundärverschiebungen stehen, ein Kräftegleichgewicht ausüben. Bei der Untersuchung des Gleichgewichts jedes einzelnen Ortra-Systems wird davon ausgegangen, dass es von seinen Restklaffungen (Abb. 4 unten), in denen aus statischer Sicht Kräfte gegeben sind, in seiner Lage gehalten wird. Des Weiteren ist bei der Unter-

suchung sicherzustellen, dass Kräfte tangential zu den einzelnen Stäben des Ortra-Systems kein Drehmoment erzeugen.

Für die Berechnung des mechanischen Gleichgewichts im einzelnen Ortra-System wird überprüft, ob sich ein Kräftegleichgewicht

$$\sum \mathbf{F}_i = 0 \quad (1.21)$$

im Ursprungspunkt des Ortra-Systems einstellt.

Dazu wird die Einzelkraft  $\mathbf{F}_i$  der Sekundärverschiebung in zwei Kräfte bzw. zwei Kraftkomponenten zerlegt:

$$\mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{l_i} \\ \mathbf{F}_{q_i} \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Dabei bezieht sich die Kraft  $\mathbf{F}_{l_i}$  auf die Längsrichtung und die Kraft  $\mathbf{F}_{q_i}$  auf die Querrichtung des Stabes eines Ortra-Systems.

Da die Vektoren der Kräfte  $\mathbf{F}_i$ , die mit den Sekundärverschiebungen in Verbindung stehen, bereits durch Länge und Richtung der Restklaffungen vorgegeben sind, werden für die Bestimmung der gesuchten unbekannten Kräfte statt Vektoren skalare Kraftdichten in ein Gleichungssystem eingeführt.

Die einzelnen Gleichungen für das Gleichungssystem werden im Folgenden festgelegt. Die Kraftdichte definiert sich als Quotient des Kraftbetrages zur Länge des Kraftvektors bzw. der Länge der zur Kraft korrespondierenden Verschiebung. Die Kraftdichte für  $\mathbf{F}_i$  ist:

$$q_{\mathbf{F}_i} = \frac{|\mathbf{F}_i|}{l_{\mathbf{F}_i}}. \quad (1.23)$$

Für das Kräftegleichgewicht muss die Vektorsumme der  $\mathbf{F}_{l_i}, i=1 \dots n$  in Richtung oder Gegenrichtung der Stäbe  $s_i$  gleich Null sein. Die das Kräftegleichgewicht ausdrückende Vektorsumme der  $\mathbf{F}_{l_i}$  wird in folgender Gleichung (1.24) weiterentwickelt, sodass weitere Gleichungen für das Gleichungssystem entstehen, das für die Bestimmung der Kraftdichten dient.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{l_i} &= \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} x_{\mathbf{F}_{l_i}} \\ y_{\mathbf{F}_{l_i}} \end{pmatrix} = 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_{\mathbf{F}_{l_i}} &= \sum_{i=1}^n y_{\mathbf{F}_{l_i}} = 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

In (1.24) ergeben sich für jedes Ortra-System mit  $\sum_{i=1}^n x_{\mathbf{F}_{l_i}} = 0$  und  $\sum_{i=1}^n y_{\mathbf{F}_{l_i}} = 0$  zwei Gleichungen für die unbekannten Kraftdichten  $q_{\mathbf{F}_i}$ .

Als Weiteres muss beim einzelnen Ortra-System an den Stabendpunkten ein Drehmoment-Gleichgewicht vorliegen:

$$\mathbf{M}_{s_i, F_{q_i}} = s_i \times \mathbf{F}_{q_i} = l_{s_i} \cdot (\mathbf{e}_{s_i} \times \mathbf{F}_{q_i}). \quad (1.25)$$

Für die Gesamt-Drehmomentsumme ergibt sich

$$\sum_{i=1}^n M_{s_i, F_{q_i}} = \sum_{i=1}^n l_{s_i} \cdot (e_{s_i} \times F_{q_i}) = 0. \quad (1.26)$$

Die Berechnung des Drehmoments eines einzelnen Stabes erfolgt als Vektorprodukt mit der Quer-Kraftkomponente  $F_{q_i}$  und dem Stabvektor  $s_i$ , der durch einen mit der Länge  $l_{s_i}$  des Stabes  $s_i$  skalierten Einheitsvektor  $e_{s_i}$  repräsentiert wird.

Mit dem Drehmoment-Gleichgewicht (1.26) ergibt sich für jedes Ortra-System eine weitere Gleichung für die unbekannten Kraftdichten  $q_{F_i}$ .

Zwei weitere Gleichungen können gebildet werden, wenn die Kräfte  $F_i$  der Sekundärverschiebungen des Ausgangs-Ortra-Systems bei den Ursprüngen der benachbarten Ortra-Systeme untersucht werden. Dazu wird die Kraft  $F_i$  in der Koordinatenform dargestellt:

$$F_i = \begin{pmatrix} x_{F_i} \\ y_{F_i} \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Bei den Ursprüngen der benachbarten Ortra-Systeme muss folgendes Kräftegleichgewicht gelten, wenn im einzelnen Ortra-System-Ursprung angenommene 1 Kräfte von Sekundärverschiebungen angreifen:

$$\sum_{i=1}^1 F_i = \sum_{i=1}^1 \begin{pmatrix} x_{F_i} \\ y_{F_i} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^1 x_{F_i} = \sum_{i=1}^1 y_{F_i} = 0. \quad (1.28)$$

Damit ergeben sich mit  $\sum_{i=1}^1 x_{F_i} = 0$  und  $\sum_{i=1}^1 y_{F_i} = 0$  (Gleichung 1.28 rechts) zwei weitere Gleichungen für die unbekannten Kraftdichten  $q_{F_i}$ .

Das Gleichungssystem zur Bestimmung des Gleichgewichts der Kräfte der Restklassungen bzw. der Kräfte, die die Sekundärverschiebungen verursachen, ist unterbestimmt.

Bei der Methode der kleinsten Quadrate wird die Forderung nach Minimierung der Verbesserungssumme zur Lösung des überbestimmten Problems gestellt. Aus Sicht der Mechanik und Baustatik soll nun eine Methode der kleinsten Quadrate zur Anwendung kommen, die eine Forderung nach Minimierung der Kräfte zur Lösung des unterbestimmten Problems stellt. In Verbindung mit der vorgegebenen Geometrie für die Kräfte wird damit dem Gesetz der minimalen Formveränderung entsprochen, da minimale Kräfte minimale Formveränderungen durchführen.

Als Zusatzbedingung wird an das unterbestimmte Gleichungssystem die Bedingung gestellt, dass Funktionen der Kräfte gleich Null werden (= Definition des Kräfte- und Drehmomenten-Gleichgewichts über eine algebraische Funktion). Das System kann wie folgt definiert werden:

$$(b + \hat{v})^t P(b + \hat{v}) = \min, \quad (1.29)$$

$$\hat{b}^t P \hat{b} = \min, f(\hat{b}) = f(b + \hat{v}) = 0.$$

Die Beobachtungen  $b$  sind mit Näherungswerten eingeführte Kraftdichten. Für die mit den Sekundärverschiebungen in Verbindung stehenden Kräfte können in guter Näherung die im Weggrößenverfahren geschätzten Kraftdichten der zugehörigen Primärverschiebungen verwendet werden.

Das unterbestimmte Problem kann nach Schek (1975) als Extremwertaufgabe mit einer Nebenbedingung unter Verwendung von Lagrange'schen Korrelaten  $k$  definiert werden.

$$\Phi = (b + \hat{v})^t P(b + \hat{v}) - 2k^t f(b + \hat{v}). \quad (1.30)$$

Die partiellen Ableitungen nach den Beobachtungen  $b$  und den Korrelaten ergeben:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b} = P(b + \hat{v}) - \left( \frac{\partial f(\hat{b})}{\partial b} \right)^t k = \mathbf{0},$$

$$\Rightarrow b + \hat{v} - P^{-1} \left( \frac{\partial f(\hat{b})}{\partial b} \right)^t k = \mathbf{0}. \quad (1.31)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial k} = f(b + \hat{v}) - f(\hat{b}) = \mathbf{0}.$$

Mit der Entwicklung von  $f(\hat{b})$  in einer Taylorentwicklung unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$f(\hat{b}) = f(b) + \frac{\partial f(b)}{\partial b} v = \mathbf{0} \quad (1.32)$$

ergibt sich nach weiterer Rechnung:

$$\left( \frac{\partial f(b)}{\partial b} \right) (b + v) = \left( \frac{\partial f(b)}{\partial b} \right) P^{-1} \left( \frac{\partial f(b)}{\partial b} \right)^t k \quad (1.33)$$

und

$$b + v - P^{-1} \left( \frac{\partial f(b)}{\partial b} \right)^t k = \mathbf{0}. \quad (1.34)$$

Mit der Korrelate

$$k = \left[ \left( \frac{\partial f(b)}{\partial b} \right) P^{-1} \left( \frac{\partial f(b)}{\partial b} \right)^t \right]^{-1} \cdot \left[ \left( \frac{\partial f(b)}{\partial b} \right) b - f(b) \right] \quad (1.35)$$

und der Verbesserung

$$v = P^{-1} \left( \frac{\partial f(b)}{\partial b} \right)^t k - b \quad (1.36)$$

ergeben sich die gesuchten »verbesserten« Kraftdichten  $q$  zu

$$q = b + v. \quad (1.37)$$

Bei Bestimmung der Kraftdichten für ein aus verketteten Ortra-Kleinsystemen aufgebautes Ortra-Gesamtsystem hat sich gezeigt, dass am Rand des Umformungsgebiets Ortra-Systeme auftreten können, die keine mechanische Funktion besitzen, da sie keine Kräfte auf andere Ortra-Systeme übertragen können. Innere Ortra-Kleinsysteme weisen in den Simulationsrechnungen immer eine mechanische Funktion auf und tragen zum Kräftegleichgewicht gekoppelter Ortra-Systeme bei.

## 7 Sichtbarmachung der Netzspannungen (Koordinatenwidersprüche)

Als unmittelbare Auswirkung der Spannungen auf ein geodätisches Netz sind Koordinatenwidersprüche bei Punkten zwischen GK und UTM wahrnehmbar.

In der Sprache der Mechanik können Koordinatenwidersprüche identifiziert werden zwischen einer unverformten, mit Mitteln der Ausgleichung aufgebauten Referenzkonfiguration und einer in einen festen UTM-Koordinatenreferenzrahmen eingespannten, ebenfalls durch Ausgleichung aufgebauten Momentankonfiguration. Der UTM-Koordinatenreferenzrahmen besitzt dabei auf UTM-Seite unveränderliche, als mechanische Lager dienende identische Punkte.

Zunächst können die Differenzvektoren  $\Delta\mathbf{x}$  als Differenzen von Koordinaten, die aus unterschiedlichen Ausgleichungen hervorgehen, berechnet werden:

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \quad \text{mit} \\ \mathbf{x} = \text{endgültiger UTM-Grundriss und} \\ \bar{\mathbf{x}} = \text{nach UTM übertragener GK-Grundriss als} \\ \text{Referenzkonfiguration.} \quad (1.38)$$

Mit Ausnahme der Passpunktgewichte werden die Grundrisskoordinaten  $\bar{\mathbf{x}}$  der Referenzkonfiguration durch Einführung von gleichen Gewichten im stochastischen Modell für alle Beobachtungstypen aufgebaut. Als Beobachtungen werden sowohl Linienbeobachtungen entlang der Flurstücksgrenzen als auch Querverstrebungen über das Flurstück und zusätzlich direkte Koordinatenbeobachtungen für die identischen Punkte definiert. Unter temporärer Außerkraftsetzung des Grundsatzes von »Ein Punkt, ein Satz von Koordinaten« erhält der mit minimaler Grundrissverformung nach UTM überführte GK-Grundriss in den identischen Punkten neben seinen gemessenen Koordinaten  $\mathbf{x}$  ein zweites Koordinatenpaar mit ausgeglichenen Koordinaten. Diese sind in der Regel nicht mit den gemessenen Koordinaten identisch.

Das Prinzip »Ein Punkt, ein Satz von Koordinaten« ist für die endgültige Ausgleichung wichtig, nicht jedoch für die freie Netzausgleichung zur indirekten Bestimmung der Koordinatendifferenzen. Das Prinzip besagt, dass die ursprünglich gemessene Koordinate des identischen Punktes anzuhalten ist und der Punkt keine zusätzliche

transformierte Koordinate aus der Umformung erhalten darf.

Die zunächst bei den identischen Punkten ermittelten Koordinatendifferenzen liefern Koordinatenwidersprüche  $\Delta\mathbf{x}$ , die die Netzspannungen sichtbar machen. Die Koordinatendifferenzen können als Knotenverschiebungen aus der Sicht der Mechanik interpretiert werden, da diese Koordinatenwidersprüche durch unterschiedliche Lagen der Knoten zwischen einer Referenzkonfiguration und einer Momentankonfiguration erklärbare sind.

Der einzeln betrachtete Vektor der im Ursprung eines Ortra-Systems liegenden Knotenverschiebung ist jedoch ein resultierender Vektor aller Primär- und Sekundärverschiebungen sowie einer weiteren Festkörperverschiebung (einschließlich Drehung) des jeweiligen Ortra-Systems.

Wie bereits mit Hilfe der Grundgleichungen der Statik dargestellt wurde, hängen die Netzspannungen direkt mit den Knotenverschiebungen zusammen.

### 7.1 Ausgleichung für Erzeugung des Referenz-UTM-Grundrisses (Referenzkonfiguration)

Aus Sicht der Mechanik erfolgt die Überführung des GK-Grundrisses nach UTM mittels des Ansatzes der freien Netzausgleichung zu einem Grundriss mit vernachlässigbarer Spannung kleiner Größenordnung.

Die Spannungen minimaler Größenordnungen lassen sich z.B. aufzeigen, indem eine Streckenausgleichung auf Basis der GK-/UTM-Koordinaten der Referenzkonfiguration durchgeführt wird. Die in der Streckenausgleichung sichtbaren minimalen Fehlerellipsen, die auf GK-/UTM-Streckenwidersprüchen des vorliegenden Koordinatenmaterials basieren, zeigen das vernachlässigbare Ausmaß der Spannungen und Verzerrungen in der Referenzkonfiguration in UTM.

Deshalb soll im Weiteren von spannungsfreier bzw. spannungsminimaler Übertragung des GK-Grundrisses in die Referenzkonfiguration gesprochen werden.

Die Koordinaten  $\bar{\mathbf{x}}$  der Referenzkonfiguration berechnen sich zu:

$$\bar{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{l}. \quad (1.39)$$

$\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}}$  kennzeichnet die Gewichtsmatrix der unverformten Koordinaten  $\bar{\mathbf{x}}$ . Bei der Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}}$  wird ausschließlich die Diagonale mit dem Gewicht  $p = 1$  als streckenunabhängigem Gewicht für Grundrissbeobachtungen und mit dem niedrigen Gewicht  $p = 0,1$  für direkte Koordinatenbeobachtungen belegt.

Durch die spezielle niedrige Passpunktgewichtung können die im gewichteten Ausgleichungsansatz für die Erzeugung des IST-UTM-Grundrisses als mechanische Lager des Ortra-Fachwerks dienenden identischen Punkte bei der Referenzkonfiguration nahezu keine Kräfte in die Umgebung abtragen. Damit wird die Form des Grund-

risses nahezu ohne Spannungen von GK nach UTM überführt. Die identischen Punkte werden mit dem durch gleiche Gewichte versteiften Grundriss mitverschoben.

## 7.2 Ausgleichung für Erzeugung des IST-UTM-Grundrisses (Momentankonfiguration)

Die Koordinaten  $\mathbf{x}$  der mechanischen Kräften unterworfenen, verformten Momentankonfiguration werden durch folgende Ausgleichung gebildet:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^t \mathbf{P}_{xx} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P}_{xx} \mathbf{l}. \quad (1.40)$$

Anmerkung: Die unbekannten Koordinaten  $\mathbf{x}$  in Gleichung (1.40) sind UTM-Koordinaten der Momentankonfiguration, die Variable  $\bar{\mathbf{x}}$  aus Gleichung (1.39) bezeichnet dagegen die unbekannten UTM-Koordinaten der unverformten Ausgangskonfiguration.

Für die Ausgleichung kommt ein streckenabhängiges Gewicht für die Grundrissbeobachtungen und eine hohe Passpunktgewichtung  $p = 10.000$  für die identischen Punkte zur Anwendung.

Durch Zwangsanschluss an die identischen Punkte werden die vorher existierenden Koordinatendifferenzen eliminiert. Durch Einspannung in den unveränderlichen, damit starren UTM-Rahmen durch Zwangsanschluss in den identischen Punkten werden in der aktuellen Konfiguration mechanische Kräfte erzeugt.

Die unterschiedlichen Gewichtsansätze der beiden Schätzungen, die wie dargestellt mechanisch motiviert sind, werden bei unverändertem funktionalem Modell zueinander in Beziehung gebracht:

$$\mathbf{P}_{xx} = \mathbf{P}_{\bar{xx}} + \Delta \mathbf{P}. \quad (1.41)$$

Die Diagonalmatrix  $\Delta \mathbf{P}$  bringt die unterschiedlichen Streckengewichtungen zwischen  $\mathbf{P}_{xx}$  und  $\mathbf{P}_{\bar{xx}}$  für die einzelnen Linienbeobachtungen und die unterschiedlichen Gewichte bei den identischen Punkten zum Ausdruck.

Durch die Einspannung in den Rahmen kommt es zu Spannungen im Zielsystem. Infolge der unterschiedlich definierten Gewichtungen bei unverändertem funktionalem Modell, das durch die A-Matrix repräsentiert wird, kann die Normalgleichungsmatrix  $N_{xx}$  für die UTM-Koordinaten  $\mathbf{x}$  der verformten Momentankonfiguration aus der Normalgleichungsmatrix  $N_{\bar{xx}}$  der »unverformten« UTM-Koordinaten  $\bar{\mathbf{x}}$  durch Erweiterung mit dem Term  $\mathbf{A}^t \Delta \mathbf{P} \mathbf{A}$  gebildet werden. Der mechanisch beanspruchte Grundriss aus (1.40) berechnet sich zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (N_{\bar{xx}} + \mathbf{A}^t \Delta \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{P}_{\bar{xx}} \mathbf{l} + \mathbf{A}^t \Delta \mathbf{P} \mathbf{l}) \\ &= N_{xx}^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{P}_{\bar{xx}} \mathbf{l} + \mathbf{A}^t \Delta \mathbf{P} \mathbf{l}). \end{aligned} \quad (1.42)$$

Für die Differenzen  $\Delta \mathbf{x}$  zwischen den Schätzwerten für die Unbekannten der beiden Ausgleichungen müssen die

Inversen der Normalgleichungsmatrizen  $N_{\bar{xx}}$  und  $N_{xx}$  gebildet werden. Um die Beziehung zwischen beiden inversen Matrizen weiter zu entwickeln, wird die Matrix-Identität nach Schur-Frobenius-Woodbury herangezogen (Zurmühl 1997). Diese ist:

$$\Delta^{-1} = (\mathbf{D}^{-1} - \mathbf{C} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{D} + \mathbf{D} \mathbf{C} (\mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{D} \mathbf{C})^{-1} \mathbf{B} \mathbf{D}. \quad (1.43)$$

Die in (1.43) vorkommenden Matrizen  $\Delta$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{A}$  sind quadratisch und besitzen darüber hinaus identische Matrix-Dimensionen. Von den Matrizen  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{C}$  wird gefordert, dass sie gleiche Spalten- bzw. Zeilenanzahl wie  $\Delta$ ,  $\mathbf{D}$  und  $\mathbf{A}$  besitzen, also linksseitig oder rechtsseitig mit den quadratischen Matrizen  $\Delta$ ,  $\mathbf{D}$  oder  $\mathbf{A}$  verkettbar sind.

Der Ausdruck für  $N_{xx}^{-1} = (N_{\bar{xx}} + \mathbf{A}^t \Delta \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$  in (1.42) wird mit Hilfe der Matrix-Identität (1.43) in folgenden Ausdruck übersetzt:

$$N_{xx}^{-1} = N_{\bar{xx}}^{-1} - N_{\bar{xx}}^{-1} \mathbf{A}^t (\mathbf{A} N_{\bar{xx}}^{-1} \mathbf{A}^t + \Delta \mathbf{P}^{-1})^{-1} \mathbf{A} N_{\bar{xx}}^{-1}. \quad (1.44)$$

In Gleichung (1.44) wird analog zu Niemeier (2008) eine Hilfsmatrix  $\mathbf{K}$  eingeführt:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= N_{\bar{xx}}^{-1} \mathbf{A}^t (\mathbf{A} N_{\bar{xx}}^{-1} \mathbf{A}^t + \Delta \mathbf{P}^{-1})^{-1} \text{ bzw.} \\ \mathbf{K} &= \mathbf{Q}_{\bar{xx}} \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \mathbf{Q}_{\bar{xx}} \mathbf{A}^t + \Delta \mathbf{Q})^{-1}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Mit der Hilfsmatrix  $\mathbf{K}$  wird  $N_{xx}^{-1}$  zu

$$N_{xx}^{-1} = N_{\bar{xx}}^{-1} - \mathbf{K} \mathbf{A} N_{\bar{xx}}^{-1} \quad (1.46)$$

und die Koordinaten  $\mathbf{x}$  zu

$$\mathbf{x} = (N_{\bar{xx}}^{-1} - \mathbf{K} \mathbf{A} N_{\bar{xx}}^{-1})(\mathbf{A}^t \mathbf{P}_{\bar{xx}} \mathbf{l} + \mathbf{A}^t \Delta \mathbf{P} \mathbf{l}). \quad (1.47)$$

Durch Ausmultiplizieren und weitere Vereinfachung ergibt sich der Ausdruck für  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{K} \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{l} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{K} (\mathbf{l} - \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}). \quad (1.48)$$

Die Koordinatenwidersprüche  $\Delta \mathbf{x}$  sind somit:

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{K} (\mathbf{l} - \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}) = \mathbf{Q}_{\bar{xx}} \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \mathbf{Q}_{\bar{xx}} \mathbf{A}^t + \Delta \mathbf{Q})^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}}). \quad (1.49)$$

Für den Ausdruck (1.49) wird ein erweitertes Normalgleichungssystem entwickelt, das das funktionale Modell ( $\mathbf{A}^t \Delta \mathbf{P} \mathbf{A}$ ) der Ausgangsnetzausgleichung zur Bestimmung der Koordinaten  $\bar{\mathbf{x}}$  enthält. Zur Ermittlung der Unbekannten  $\mathbf{x}$  der endgültigen Koordinaten erfolgt eine Ränderung des Ausgangs-Normalgleichungssystems mit der Inversen der Differenz-Gewichtsmatrix  $\Delta \mathbf{P}^{-1} = \Delta \mathbf{Q}$ , die als Diagonalmatrix eingeführt wird, und der originalen bzw. transponierten Matrix  $\mathbf{A}$ . Als Nebenprodukt des geränderten, erweiterten Normalgleichungssystems ergibt sich ein Ausdruck für die Koordinatenwidersprüche  $\Delta \mathbf{x}$ .

Dieses lautet:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{A}^t \\ \mathbf{A} & -\Delta \mathbf{Q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{l} \\ \mathbf{l} \end{bmatrix}. \quad (1.50)$$

Das erweiterte Normalgleichungssystem ergibt ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} + \mathbf{A}^t \mathbf{k} &= \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{l}, \\ \mathbf{A} \mathbf{x} - \Delta \mathbf{Q} \mathbf{k} &= \mathbf{l}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Nach weiterer Rechnung ergibt sich folgender Ausdruck für die Korrelaten  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{k} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^t + \Delta \mathbf{Q})^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{l}) - \mathbf{l}). \quad (1.52)$$

Die erste Zeile von (1.51) wird im Folgenden für die Bestimmung der endgültigen Koordinaten  $\mathbf{x}$  verwendet:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} &= \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{l} - \mathbf{A}^t \mathbf{k} \Rightarrow \\ \mathbf{x} &= (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{l} - (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{k}, \\ \mathbf{x} &= \bar{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Die endgültigen Koordinaten  $\mathbf{x}$  setzen sich damit aus den Koordinaten  $\bar{\mathbf{x}}$  und dem Koordinatenwiderspruch  $\Delta \mathbf{x}$  zusammen. Der Koordinatenwiderspruch kann bei Auflösung des geränderten Normalgleichungssystems direkt bestimmt werden durch:

$$\Delta \mathbf{x} = -(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{k}. \quad (1.54)$$

Zur Verifizierung der Gleichung (1.54) wird der Ausdruck für die Korrelate  $\mathbf{k}$  von (1.52) explizit in die Gleichung (1.54) eingesetzt:

$$\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}} \mathbf{A}^t + \Delta \mathbf{Q})^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{x}}), \quad (1.55)$$

womit sich die Identität zur Gleichung (1.49) ergibt.

Wenn die Koordinaten  $\bar{\mathbf{x}}$  der Ausgangsausgleichung vorliegen, können die Koordinatenwidersprüche  $\Delta \mathbf{x}$  auch über folgenden Ansatz berechnet werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{A}^t \\ \mathbf{A} & -\Delta \mathbf{Q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{l} - \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{x}} \end{bmatrix}. \quad (1.56)$$

Zur Überprüfung des Ansatzes (1.56) wird seine obere Zeile

$$(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A}) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{A}^t \mathbf{k} = 0 \quad (1.57)$$

mit  $-\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$  multipliziert und zur zweiten Zeile addiert. Daraus folgt für die Korrelaten:

$$\mathbf{k} = \mathbf{A} \left( \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} \right)^{-1} \mathbf{A}^t + \Delta \mathbf{Q} \left( \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{l} \right). \quad (1.58)$$

Somit lassen sich die Koordinatenwidersprüche  $\Delta \mathbf{x}$ , wie folgt, berechnen:

$$\Delta \mathbf{x} = \left( \mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A} \right)^{-1} \underbrace{\mathbf{A}^t (\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{A}^t + \Delta \mathbf{Q})^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{x}})}_p. \quad (1.59)$$

In dem Abschnitt über das Weggrößenverfahren wurde bereits eine Gleichung (1.13) für den funktionalen Zusammenhang zwischen Knotenverschiebungen  $\mathbf{r}$  und äußeren Kräften  $\mathbf{p}$  mit Hilfe der inversen Gesamtsteifigkeitsmatrix der Mechanik hergeleitet.

Wegen der skizzierten Analogie zwischen Mechanik und Ausgleichungsrechnung wird diese Gleichung (1.13) nun umformuliert, dass die Knotenverschiebungen den Koordinatenwidersprüchen zugeordnet werden konnten. Darüber hinaus kann die inverse Gesamtsteifigkeitsmatrix  $(\mathbf{A}^t \mathbf{K} \mathbf{A})^{-1}$  durch die inverse Normalgleichungsmatrix eines vermittelnden Ausgleichungsansatzes substituiert werden. Die Formulierung der Gleichung (1.13) mit den aus dem funktionalen Modell einer vermittelnden Ausgleichung bekannten Matrizen wird zu:

$$\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{p}. \quad (1.60)$$

Die Gleichung (1.60), die Koordinatenwidersprüche  $\Delta \mathbf{x}$  in den funktionalen Zusammenhang zu den äußeren Kräften  $\mathbf{p}$  stellt, ist zur Gleichung (1.13) der Mechanik äquivalent und analog.

Der über mehrere Ansätze hergeleitete Ausdruck für die Koordinatenwidersprüche (1.49, 1.55, 1.59) wird der Gleichung (1.60) direkt gegenübergestellt, um eine mechanische Interpretation für (1.59) zu erhalten.

Bei beiden Gleichungen ist der erste Term  $(\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}$ , die inverse Normalgleichungsmatrix, identisch. Der in (1.59) dem gemeinsamen Term folgende Teil kann dann als formelmäßiger Zusammenhang für äußere Kräfte identifiziert werden.

Die Kräfte  $\mathbf{p}$  können im Folgenden in Abhängigkeit der Inversen der Gewichtsdifferenz  $\Delta \mathbf{Q}$  und des funktionalen und stochastischen Modells der Ausgleichung für  $\bar{\mathbf{x}}$  ausgedrückt werden.

Damit ergibt sich für die die Koordinatenwidersprüche  $\Delta \mathbf{x}$  erzeugenden äußeren Kräfte folgende Gleichung:

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}^t (\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}_{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{x}}} \cdot \mathbf{A}^t + \Delta \mathbf{Q})^{-1} (\mathbf{l} - \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{x}}). \quad (1.61)$$

## 8 Verteilung der Koordinatenwidersprüche bei Netzverdichtung

Die zuerst ausgeführte Ausgleichung für die Flurstücke (Abb. 1) soll, wie folgt, mit dem Index 1 gekennzeichnet werden:

$$\mathbf{x}_1 = (\mathbf{A}_1^t \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^t \mathbf{P}_1 \mathbf{l}_1. \quad (1.62)$$

Die nachfolgend als Netzverdichtungsausgleichung konzipierte zweite Ortra-Ausgleichung für die Gebäude nutzt die Umformungsergebnisse der Flurstücksausgleichung als Anschlusspunkte im funktionalen Modell. Diese identischen Punkte sollen auch in den UTM-Koordinaten unveränderlich sein und als mechanische Lager für das Gebäudenetz dienen. Der Netzverdichtungsansatz wird bei der folgenden Ausgleichung für die Bauwerke analog definiert.

Die als *zweite* ausgeführte Ausgleichung für Gebäude soll den Index 2 bekommen. Die im hierarchischen Ansatz der Netzverdichtung im Unbekanntenvektor  $\mathbf{x}_2$  zu definierenden UTM-Koordinaten der Gebäudepunkte werden über vermittelnde Ausgleichung, wie folgt, berechnet:

$$\mathbf{x}_2 = (\mathbf{A}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{A}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{l}_2. \quad (1.63)$$

Zur Verdeutlichung, wie Koordinaten als Anschlusskoordinaten eingeführt werden, wird die Basisgleichung des Ortra-Verfahrens zur Bestimmung der UTM-Koordinaten (1.1) leicht modifiziert:

$$\begin{aligned} 0 &= E_2 + o_1(x_{F_1} - x_2) + a_1(y_{F_1} - y_2) - E_{F_1}, \\ 0 &= N_2 + a_1(x_{F_1} - x_2) - o_1(y_{F_1} - y_2) - N_{F_1}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Gleichung (1.64) wird im Weiteren für die Definition der Beobachtungsgleichungen für die Ausgleichung (1.63) der Gebäude verwendet. Die als Anschlusskoordinaten einfließenden Koordinaten  $(E_{F_1}, N_{F_1})$  des Punktes  $P_{F_1}$  werden, wie bereits an anderer Stelle erwähnt, als unveränderlich angenommen.

Im Folgenden wird gezeigt, wie die Koordinatenwidersprüche  $\Delta\mathbf{x}_1$  zur Erhaltung der Nachbarschaftsgenauigkeit in nachfolgenden Ausgleichungen weiter verteilt werden.

Beim Verdichtungsansatz für Gebäude sind die in der vorangegangenen Ausgleichung durch Zwangsanschluss verursachten Knotenverschiebungen bei den Flurstücks-grenzpunkten als zu eliminierende Koordinatenwidersprüche definiert, wenn nachfolgend die Flurstücks-grenzpunkte in der Ausgleichung für Gebäude die Rolle von identischen Punkten übernehmen.

Für die Eliminierung der Koordinatenwidersprüche innerhalb der Gebäudeausgleichung müssen mechanische Kräfte  $\mathbf{p}_2$  aufgewendet werden, die Netzzspannungen infolge des dritten Newton'schen Gesetzes *Actio gleich Reactio* im lokalen Gebäudenetz erzeugen. Die neuen Netzzspannungen stehen mechanisch in keiner Beziehung zu den Netzzspannungen der vorherigen Ausgleichung und bilden folglich durch die Entkopplung keine Gleichgewichtsfigur mit den vorliegenden Flurstücksbeobachtungen.

Die Kräfte  $\mathbf{p}_2$  im Verdichtungsnetz lassen sich, wie folgt, berechnen:

$$\mathbf{p}_2 = (\mathbf{A}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{A}) \cdot \Delta\mathbf{x}_1 = (\mathbf{A}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2) \cdot (\mathbf{A}_1^t \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1)^{-1} \cdot \mathbf{p}_1. \quad (1.65)$$

Die in (1.64) vorliegenden Koordinaten der identischen Punkte enthalten den Koordinatenwiderspruch wie folgt:

$$\begin{aligned} E_{F_1} &= \bar{E}_{F_1} + \Delta E_{F_1}, \\ N_{F_1} &= \bar{N}_{F_1} + \Delta N_{F_1}. \end{aligned} \quad (1.66)$$

$\bar{E}_{F_1}$  und  $\bar{N}_{F_1}$  können aus der vorhergehenden Flurstücksausgleichung aus dem Vektor  $\bar{\mathbf{x}}_1$  der Koordinaten entnommen werden. Die Koordinatenwidersprüche  $\Delta E_{F_1}$  und  $\Delta N_{F_1}$  spiegeln sich im Vektor  $\Delta\mathbf{x}_1$  wieder. Als unveränderliche Koordinaten können die Anschlusskoordinaten der Flurstücksgrenzpunkte beim funktionalen Modell der Folgeausgleichung in den Beobachtungsvektor  $\mathbf{l}$  aufgenommen werden. Das funktionale Modell des Verdichtungsansatzes lautet dann ausgeschrieben:

$$v = \begin{bmatrix} \hat{v}_{E_1} \\ \hat{v}_{N_1} \\ \hat{v}_{E_2} \\ \vdots \\ \hat{v}_{E_n} \\ \hat{v}_{N_n} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{l} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} a_{F_1} \\ o_{F_1} \\ E_1 \\ N_1 \\ a_{F_2} \\ o_{F_2} \\ E_2 \\ N_2 \\ \vdots \\ a_{F_n} \\ o_{F_n} \\ E_n \\ N_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\bar{E}_{F_1} + \Delta E_{F_1}) \\ (\bar{N}_{F_1} + \Delta N_{F_1}) \\ (\bar{E}_{F_2} + \Delta E_{F_2}) \\ (\bar{N}_{F_2} + \Delta N_{F_2}) \\ \vdots \\ (\bar{E}_{F_n} + \Delta E_{F_n}) \\ (\bar{N}_{F_n} + \Delta E_{F_n}) \end{bmatrix}. \quad (1.67)$$

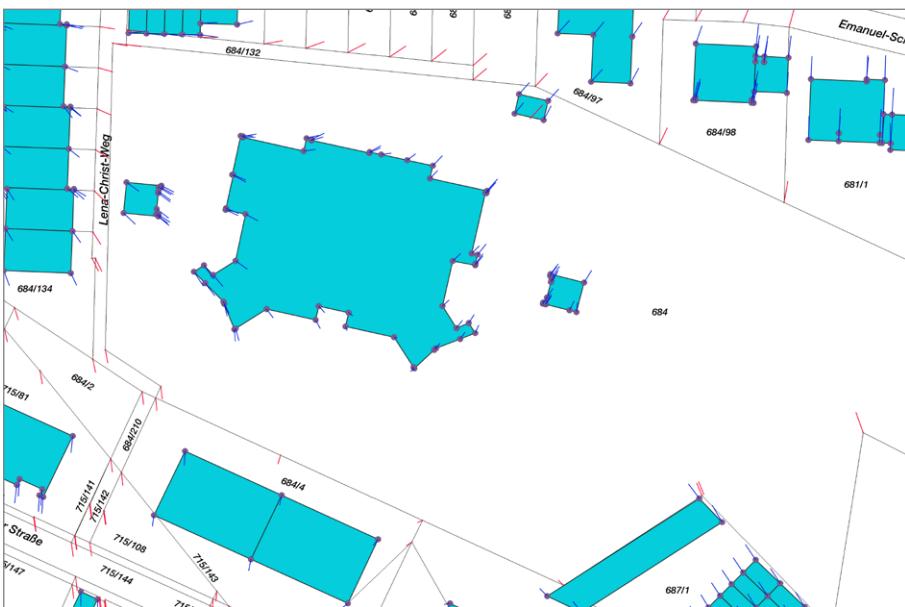
Für die Herleitung der Verteilung der Koordinatenwidersprüche wird bei der Bestimmungsgleichung zur Berechnung der unbekannten Gebäudepunkte  $\mathbf{x}_2 = (\mathbf{A}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{A}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{l}_2$  der Beobachtungsvektor  $\mathbf{l}_2$  in einen Vektor mit Koordinaten ohne Koordinatenwidersprüche  $\mathbf{l}_{2_{-\bar{x}_1}}$  (= Anschlusskoordinaten, die der unverformten Referenzkonfiguration entnommen werden können) und in einen Vektor mit den Koordinatenwidersprüchen  $\mathbf{l}_{2_{-\Delta\mathbf{x}_1}}$  zerlegt.

Die Unbekannten  $\mathbf{x}_2$  berechnen sich, wie folgt:

$$\mathbf{x}_2 = (\mathbf{A}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{A}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{l}_{2_{-\bar{x}_1}} + (\mathbf{A}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{A}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{l}_{2_{-\Delta\mathbf{x}_1}}. \quad (1.68)$$

Gleichung (1.68) zeigt, dass die Koordinatenwidersprüche  $\Delta\mathbf{x}_1$  wie die Koordinaten  $\bar{\mathbf{x}}_1$  identisch über  $(\mathbf{A}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{A}_2^t \mathbf{P}_2$  auf die Neupunkte übertragen werden. Wie die Anschlusskoordinaten  $E_{F_1}$  und  $N_{F_1}$  gehen die  $\Delta E_{F_1}$  und  $\Delta N_{F_1}$  linear in das Ausgleichungsmodell ein.

Bei dem Term  $(\mathbf{A}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{A}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{l}_{2_{-\bar{x}_1}}$ , der in (1.68) zur Bestimmung der UTM-Koordinaten der Gebäude führt, muss davon ausgegangen werden, dass dieser einen



**Abb. 5:** Verteilung der Koordinatenwidersprüche im hierarchischen Verdichtungsansatz von den Flurstücken (rot) in die durch nachfolgende Ausgleichung aufgebauten Gebäude (blau). Beispiel aus Vilsbiburg, Kindergarten St. Elizabeth. Mit den im Bild sichtbaren Differenzvektoren von maximal 3 cm Länge bewegen sich die Knotenwidersprüche im Bereich der Katastergenauigkeit.

weiteren Anteil zu den Koordinatenwidersprüchen  $\Delta\mathbf{x}_2$ , wenn auch kleiner Ordnung, definiert. Dann setzt sich  $\Delta\mathbf{x}_2$  neben dem Anteil der durch das funktionale Modell  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 - \mathbf{l}_2$  in die Unbekannten  $\mathbf{x}_2$  übertragenen Koordinatenwidersprüche  $\Delta\mathbf{x}_1$  darüber hinaus noch aus dem Anteil der Knotenverschiebungen der Gebäudeausgleichung zusammen. Gleichung (1.68) zeigt im Weiteren, dass die Koordinatenwidersprüche der Anschlusspunkte linear und absolut im vollen Umfang in den Gesamtanteil einfließen, da sie in dem gleichen funktionalen Modell berechnet werden wie die Anschlusskoordinaten  $E_{F_i}$  und  $N_{F_i}$ .

Aus statisch-mechanischer Betrachtungsweise sind die in die Folgeausgleichung eingehenden Koordinatenwidersprüche  $\Delta\mathbf{x}_1$  bei den Anschlusspunkten mit den äußeren Kräften  $\mathbf{p}_1$ , die in der vorangegangenen Flurstücksausgleichung durch Zwangsanschluss an die identischen Punkte aufgewendet werden mussten, über den Term  $(\mathbf{A}_1^t \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1)^{-1}$  verknüpft. Damit stehen die Netzspannungen des Verdichtungsnetzes, die sich aus den äußeren Kräften mit  $\mathbf{p}_2 = (\mathbf{A}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2) \Delta\mathbf{x}_2$  ableiten lassen, in einem direkten Zusammenhang mit den Netzspannungen im übergeordneten Netz. Über verschiedene mathematische Verknüpfungen der Normalgleichungsmatrizen  $(\mathbf{A}_1^t \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_1)$  und  $(\mathbf{A}_2^t \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2)$  kann die Verteilung der Koordinatenwidersprüche erklärt werden (Abb. 5). Darüber hinaus wird ein mathematischer Zusammenhang hergestellt zwischen der vorherigen Netzspannung der übergeordnet angelegten Netzausgleichung und der nachfolgenden Netzspannung der Netzverdichtungsausgleichung.

Über einen formelmäßigen Zusammenhang wird gezeigt, wie und in welcher Quantität die Netzspannungen bei Netzverdichtung über den hierarchischen Ansatz über mechanisch arbeitende Lager in das Verdichtungsnetz induziert werden. Als Beispiele für einen hierarchischen Ansatz sind neben dem heutigen Ortra-Ansatz frühere Verdichtungsnetze der 2. und 3. Ordnung der Landesvermessung zu nennen. Damit können im Sinne der

Homogenisierung die Koordinatenwidersprüche in das Verdichtungsnetz so übertragen werden, dass diese die Nachbarschaft bestmöglich erhalten.

Über die lineare Verteilung der Koordinatenwidersprüche und der damit verbundenen Verteilung der Netzspannungen wird die Nachbarschaftsgenauigkeit von der übergeordneten Ausgleichung auf die Objektbereiche der nachgeordneten Ausgleichungen übertragen. Die minimale Formänderung trägt ebenso dazu bei, dass innerhalb der Objektbereiche die Nachbarschaftsgenauigkeit erhalten bleibt.

Die Koordinaten  $\mathbf{x}$  werden mit ihrer Nachbarschaft und ihrer Genauigkeit über die aus Sicht der Geodäsie und Mechanik universelle und zentrale Matrix  $\mathbf{Q}_{xx}$  nach UTM überführt. Sowohl innerhalb als auch zwischen den Objektbereichen wird dies über eine lineare Verteilung der Koordinatenwidersprüche vollzogen.

Durch exakte Nachbildung des GK-Grundrisses mit den Ortra-Kleinsystemen, die jeweils für sich konforme Abbildungen repräsentieren, wird eine konforme Abbildung im Gesamten erreicht.

Die beim UTM-Überführungsansatz geforderte möglichst weitreichende Geometriehaltung bei gegebenen Netzspannungen kann darüber hinaus damit erklärt werden, dass sich die Ortra-Kleinsysteme in Anwendung des physikalischen Gesetzes der minimalen Formveränderung insgesamt unter einem Minimumprinzip elastisch verändern.

## 9 Fazit

In diesem Artikel wurden theoretische Grundlagen für die wichtigste Aufgabe des Ortra-Verfahrens skizziert, nachbarschaftstreue und homogene Koordinaten zu erzeugen. Es wurde mittels des Mechanismus der linearen Verteilung der Koordinatenwidersprüche über identische

Punkte dargestellt, wie die in GK enthaltenen Nachbarschaftsbeziehungen durch das Ortra-Verfahren nach UTM übertragen werden können.

Das insgesamt gutmütige Umformungsverhalten des Ortra-Ansatzes kann zusammenfassend mit dem Prinzip der minimalen Formänderung, der Erhaltung der konformen Abbildung im Lokalen und den nachgewiesenen linearen Verteilungseigenschaften erklärt werden.

Dieses Umformungsverfahren wird bei der Bezugsystemeinführung des europäischen Referenzsystems ETRS89 zum Jahreswechsel 2018/2019 zur Überführung des bayerischen Liegenschaftskatasters eingesetzt.

## Literatur

- Bahndorf, J. (1991): Zur Systematisierung der Seilnetzberechnung und zur Optimierung von Seilnetzen. Dissertation Universität Stuttgart. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, in Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München. Heft C 373. München.
- Benning, W., Scholz, T. (1990): Modell und Realisierung der Kartenhomogenisierung mit Hilfe strenger Ausgleichungstechniken. In: Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV), Heft 2/1990, 115. Jg., S. 45–55.
- Benning, W., Scholz, T. (2010): Zum Lagebezugswechsel ETRS89/UTM mittels Homogenisierung. In: zfv – Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 1/2010, 135. Jg.
- Gielsdorf, F., Gründig, L. (1997): Nachbarschaftstreue Anpassung auf der Basis des Membranmodells. In: Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV), Heft 5/1997, 122. Jg.
- Glock, C. (2016): Projekt KanU – Strategie zur UTM-Umstellung des Liegenschaftskatasters in Bayern. Vortrag bei GIS@Aktuell – Neue Koordinaten für alle – von Gauß-Krüger nach UTM. 27.04.2016, München.
- Glock, C., Birkenbeul, H. (2018): ETRS89/UTM-Umstellungsstrategie in Bayern für das Liegenschaftskataster – Umformungsverfahren und Möglichkeiten der Umsetzung. In: Publikationen der Deutschen Gesellschaft für Photogrammetrie, Fernerkundung und Geoinformation, Band 27, Tagungsband zur Wissenschaftlich-Technischen Jahrestagung der DGPF und PFGK, S. 20–32. München.
- Glock, C., Vetter, C. (2014): Strategie zur Einführung des neuen Bezugsystems in Bayern. Vortrag bei »UTM in Bayern, was geht uns das an?«, Geodätisches Kolloquium der Hochschule Würzburg-Schweinfurt (FHWS). Würzburg.
- Görres, B., Nothnagel, A. (2012): Übergeordnete geodätische Koordinaten in Deutschland heute. Teil 2: Bezugssysteme für Europa. In: AVN – Allgemeine Vermessungsnachrichten, Heft 7/2012. S. 259–267.
- Hampp, D. (1992): Digitalisierung, Homogenisierung und numerische Fortführung, ein schneller Weg zur aktuellen Digitalen Flurkarte. In: Mitteilungsblatt DVW Bayern, Heft 3/1992, S. 239–252. München.
- Hampp, D., Glock, C. (2017): Ein ausgeglichenes Bayern. DVW Bayern, Mitteilungen, Heft 2/2017, S. 105 ff., München. [www.dvw.de/sites/default/files/landesverband/bayern/anhang/beitragskontext/2017/hampp.pdf](http://www.dvw.de/sites/default/files/landesverband/bayern/anhang/beitragskontext/2017/hampp.pdf).
- Joos, G., Glock, C. (2016): Bezugssystemwechsel auf ETRS89/UTM. In: Donaubauer, A., Kolbe, T. (Hrsg.): Leitfaden Runder Tisch GIS e. V., Grundlagen, Kap. 2, S. 16–45, München.
- Kampshoff, S., Benning, W. (2005): Homogenisierung von Massendaten im Kontext von Geodaten-Infrastrukturen. In: zfv – Zeitschrift für Vermessungswesen, Heft 3/2005, 130. Jg. S. 133–145.
- Krack, K. (1977): Die Blockausgleichung zur Berechnung umfangreicher tachymetrischer Aufnahmen. Dissertation Universität Stuttgart. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Nr. 231, München.
- Krätzig, W. (1988): Tragwerke 2 – Theorie und Berechnungsmethoden statisch unbestimmter Stabtragwerke. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3. Auflage.
- Kraus, K. (1966): Untersuchungen zur ebenen verketteten linearen Ähnlichkeitstransformation. In: Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV), Heft 4/1966, 91. Jg. S. 123–130.
- Lenzmann, L., Haase, H.-S., Lohmar, F.J. (1997): Zur klaffungsfreien Einpassung konformer Netze. In: Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV), Heft 1/1997, 122. Jg.
- Linkwitz, K. (1960): Fehlertheorie und Ausgleichung von Streckennetzen nach der Theorie elastischer Systeme. Dissertation an der Technischen Hochschule München, Geodätisches Institut. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in Kommission der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung. München.
- Linkwitz, K. (1977): Über eine neue Anwendung der Gauß'schen Methode der kleinsten Quadrate: Die Formfindung und statische Analyse von räumlichen Seil- und Hängenetzten. Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, Band 27, 1977. Verlag Erich Goltze KG, Göttingen, S. 121–153.
- Linkwitz, K., Gründig, L., Bahndorf, J., Neureither, M., Ströbel, D. (1987): Strategies for Formfinding and Design of Cutting-patterns for large sensitive Membrane Structures. International Conference on Design and Construction of non-conventional Structures, London.
- Mang, H. (2013): Festigkeitslehre. Lehrbuch des Springer Vieweg Verlags Berlin, Heidelberg.
- Niemeier, W. (2008): Ausgleichungsrechnung, Statistische Auswertemethoden. Lehrbuch des De Gruyter Verlags Berlin, Boston.
- Rose, A. (1988): Geraden- und Rechtwinkelausgleichung bei der Digitalisierung von Katasterkarten. In: Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV), Heft 4/1988, 113. Jg. S. 581–587.
- Schek, H.-J. (1975): Least-Squares-Lösungen und optimale Dämpfung bei nichtlinearen Gleichungssystemen im Zusammenhang mit der bedingten Ausgleichung. In: Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV), Heft 2/1975, 100. Jg. S. 67–77.
- Ströbel, D. (1995): Die Anwendung der Ausgleichungsrechnung auf elastomechanische Systeme. Dissertation Universität Stuttgart, Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen. Stuttgart.
- Westergaard, H.M. (1915): Anwendung der Statik auf die Ausgleichungsrechnung. Dissertation an der Technischen Hochschule München, Geodätisches Institut. Druck (1925) von Hubert & Co., GmbH, Göttingen.
- Zurmühl, R., Falk, S. (1997): Matrizen und ihre Anwendungen Band 1. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 7. Auflage. Berlin.

## Kontakt

Clemens Glock  
Leiter des Projekts KanU (»Kataster nach UTM«)

Landesamt für Digitalisierung, Breitband und Vermessung,  
Alexandrastraße 4, 80538 München  
[clemens.glock@ldbv.bayern.de](mailto:clemens.glock@ldbv.bayern.de)

Dr.-Ing. Rainer Bauer

Bayerisches Staatsministerium der Finanzen, für Landesentwicklung und Heimat, Odeonsplatz 4, 80539 München  
[rainer.bauer@stmlfh.bayern.de](mailto:rainer.bauer@stmlfh.bayern.de)

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Thomas Wunderlich

Technische Universität München, Lehrstuhl für Geodäsie,  
Arcisstraße 21, 80333 München  
[th.wunderlich@tum.de](mailto:th.wunderlich@tum.de)

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Roland Pail

Technische Universität München, Lehrstuhl für Astronomische und Physikalische Geodäsie, Arcisstraße 21, 80333 München  
[roland.pail@tum.de](mailto:roland.pail@tum.de)

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger

Technische Universität München, Lehrstuhl für Statik,  
Arcisstraße 21, 80333 München  
[kub@tum.de](mailto:kub@tum.de)