

Schwereanomalien in Baden-Württemberg

Kurt Seitz, Thomas Grombein und Hansjörg Kutterer

Zusammenfassung

Das Schweresignal der Erde spiegelt die Dichte- und Massenverteilung sowie die Rotation des Erdkörpers wider. Es ist dominiert vom sogenannten Zentralterm der Erde und ihrer Abplattung an den Polen. Mittel- bis hochfrequente spektrale Anteile sind durch Dichteanomalien und topographische Massen induziert.

Für das Gebiet von Baden-Württemberg werden, basierend auf hochaufgelösten terrestrischen Daten, verschiedenste Schwereanomalien berechnet. Während die Freiluft- und Faye-Anomalie noch deutlich von der Topographie geprägt sind, zeigen die Bougueranomalien einen geglätteten Verlauf. Nach Anbringen der isostatischen Reduktion sinkt die Variation der Anomalie nochmals deutlich ab. Aus einem Vergleich mit Anomalien, die aus Schwerfeldsatellitenmission abgeleitet sind, ist ersichtlich, dass letztere eine geringere räumliche Auflösung aufweisen.

Summary

The Earth's gravity signal reflects the density and mass distribution as well as the rotation of the Earth. It is dominated by the so-called central term of the Earth and its flattening at the poles. Medium to high frequency spectral components are induced by density anomalies and topographical masses.

A wide range of gravity anomalies are calculated for the Baden-Württemberg area, based on high-resolution terrestrial data. While the Free-air anomalies and Faye anomalies are clearly influenced by the topography, the Bouguer anomalies show a smoothed behavior. After applying the isostatic reduction, the variation of the anomalies decreases significantly. A comparison with anomalies derived from gravity field satellite missions clearly shows that the latter have a lower spatial resolution.

Schlüsselwörter: Freiluftreduktion, Geländereduktion, Bouguerreduktion, topographische Reduktion, Schwereanomalie

1 Einleitung

Das Schwerfeld der Erde ist geprägt von den festen, flüssigen und gasförmigen Massen des Systems Erde und deren Rotation im Raum. Ein erdgebundener Beobachter erfährt neben der Gravitationskraft, die durch die Massen verursacht wird, auch eine Wirkung der Zentrifugalkraft. Beide sind orts- und zeitabhängig.

Die Schwerkraft (Heiskanen und Moritz 1967, S. 47–48) kann mittels des Gradienten des Schwerpotentials $W = V + Z$ dargestellt werden. Dieses setzt sich additiv aus dem Gravitationspotential V und dem Zentrifugal-

potential Z zusammen. Die Kenntnis über das Schwerpotential ist in vielerlei Hinsicht von praktischer Bedeutung. So sind z.B. physikalisch definierte Höhen unmittelbar mit dem Schwerfeld der Erde bzw. einer ausgewählten Äquipotentialfläche, dem Geoid, verknüpft. Für die Bahnverfolgung passiver Erderkundungssatelliten ist die Kenntnis des Gravitationspotentials zur Prädiktion der Satellitenbahn erforderlich. Die Bestimmung des Schwerpotentials der Erde, also seiner numerischen Darstellung, kann lokal, regional oder global in Form von unterschiedlichen Basisfunktionen erfolgen – je nach Zielsetzung. Im Allgemeinen werden regionale Beschreibungen durch die Lösung einer Geodätischen Randwertaufgabe (Heck 1989) erstellt. Hierzu gehen insbesondere terrestrische (an der Erdoberfläche oder von erdnahen sensortragenden Systemen gemessene) Schwerewerte $g = |\text{grad } W|$ als Beobachtungen ein. Globale Lösungen werden in Form von Kugelfunktionsmodellen beschrieben (Tapley et al. 2004, Brockmann et al. 2014, Bruinsma et al. 2014, Fecher et al. 2017, Pail et al. 2018, Kvas et al. 2019). Die Koeffizienten dieser Geopotentialmodelle (GPM) werden primär aus geodätischen Schwerfeldsatellitenmissionen wie GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) und GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) bestimmt. Die ersten Lösungen aus der Folgemission GRACE-FO werden noch in diesem Jahr erwartet.

Die Variation des Schwerpotentials und insbesondere seiner Funktionale wie Schwere oder Schweregradient lassen auf Dichteanomalien im Untergrund schließen. Diese Einflüsse werden besonders deutlich in den Schwereanomalien. Unterschiedliche Typen von Schwereanomalien werden im Kapitel 5 erläutert.

2 Die Schwerebeschleunigung der Erde

Die Schwerebeschleunigung der Erde setzt sich aus gravitativ wirkenden Komponenten und dem Einfluss der Erdrotation zusammen (Torge und Müller 2012, S. 61). An der Erdoberfläche beträgt die Schwerebeschleunigung ca. $9,81 \text{ ms}^{-2}$, ein Zahlenwert, der aus der Schulphysik vertraut ist. Er entspricht der gravitativen Wirkung einer radial geschichteten Kugel bzw. einer homogenen Vollkugel. Alle weiteren Einflüsse sind um mindestens drei Größenordnungen kleiner, wie in Tab. 1 aufgezeigt. Die SI-Einheit der Schwerebeschleunigung ist ms^{-2} . In der Praxis ist jedoch die Einheit $1 \text{ Gal} = 0,01 \text{ ms}^{-2}$ gebräuchlich. Je nach Beobachtungsverfahren (absolut oder relativ) kann eine Messgenauigkeit von etwa 1 bis $5 \mu\text{Gal}$ erreicht werden.

Tab. 1: Variabilität der Schwere 9,81 ... ms⁻²

stationär	10 ⁰	Erde als radial geschichtete Kugel
	10 ⁻³	Abplattung und Zentrifugalbeschleunigung
	10 ⁻⁴	Berge, Täler, Ozeantröge und -rücken
	10 ⁻⁴ – 10 ⁻⁶	Dichteveriationen in Kruste und Mantel, Salzdome, Sedimentbecken, Lagerstätten
variabel	10 ⁻⁵	Gezeiten, Atmosphärenmassen
	10 ⁻⁸	Grundwasser
	10 ⁻⁹	Ozeantopographie, Polbewegung, Erdabplattung (Shako et al. 2014)
	10 ⁻¹⁰	allgemeine Relativitätstheorie

Clauser 2016

Die Einflüsse können in stationäre und zeitvariable Effekte unterteilt werden. Letztere werden von den Gezeiten und den atmosphärischen Massen angeführt und können sehr gut modelliert werden. Der Einfluss der Gezeiten liegt in der Größenordnung von $\delta g_{\text{gez}} = \pm 0,2$ mGal (Torge und Müller 2012, S. 335–337). Der Einfluss δg_{atm} der atmosphärischen Massen liegt unter 0,9 mGal (Torge 1989, Abschnitt 3.6). Durch eine Höhenreduktion $\delta g_{\Delta h}$ wird das Messniveau des Gravimeters auf die Höhe des vermarkten Gravimeterpunktes verschoben. In der Praxis beträgt dieser zu korrigierende vertikale Versatz Δh nur wenige cm. Ob und unter welchen Modellannahmen diese Korrekturen an den Messdaten angebracht sind, muss eindeutig in den Metadaten des entsprechenden Datenarchivs dokumentiert sein.

Unter Vernachlässigung weiterer zeitabhängiger, dynamischer Effekte, wie z.B. Luftdruckänderungen, Polbewegung, Meeres- und Grundwasserspiegelschwankungen, sei im Folgenden unter

$$g(P) = g_P = g^*(P) - \delta g_{\Delta h} - \delta g_{\text{gez}} - \delta g_{\text{atm}} \quad (1)$$

der um diese Effekte reduzierte Schwerewert verstanden. Dabei bezeichnet $g^*(P)$ den gemessenen Schwerewert.

Der so gravimetrisch bestimmte Schwerewert g_P fasst integral die Schwerewirkung aller Massenelemente im sogenannten Aufpunkt P zusammen. Insbesondere tragen die umliegenden topographischen Massen, aber auch lokale Dichteanomalien zu seiner ortsabhängigen Variabilität im hochfrequenten Bereich bei.

3 Die Normalschwere

Eine sehr gute Näherung des tatsächlichen Schwerfeldes der Erde wird durch ein Somigliana-Pizzetti-Normalschwerfeld (Somigliana 1929, 1930) erzielt. Es entsteht

aus der Vorgabe einer geometrischen Begrenzungsfläche, der Oberfläche eines geozentrisch gelagerten Referenzellipsoids, das die gleiche Masse wie die Erde enthält. Es rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit – der mittleren Winkelgeschwindigkeit ω der Erde.

Für jeden Punkt $Q_E(\varphi)$ auf der Ellipsoidoberfläche lässt sich als Funktion seiner geographischen Breite φ mit den Parametern des geodätischen Referenzsystems 1980 (GRS80) nach Moritz (1984) der Normalschwerewert berechnen (Torge 2003, Gl. 4.78a):

$$\gamma(\varphi) = \gamma_e \cdot \left(1 + 0,0052790414 \cdot \sin^2 \varphi + 0,0000232718 \cdot \sin^4 \varphi + 0,0000001262 \cdot \sin^6 \varphi + 0,0000000007 \cdot \sin^8 \varphi \right). \quad (2)$$

Aus der angegebenen Formel wird die Normalschwere mit dem Normalschwerewert am Äquator $\gamma_e = 9,7803267715$ ms⁻² mit einer Genauigkeit von $1 \cdot 10^{-9}$ ms⁻² = 0,1 µGal erhalten. Für einen Punkt $P(\varphi, h)$ auf der Ellipsoidnormalen mit dem Fußpunkt $Q_E(\varphi)$ kann in der ellipsoidischen Höhe h nach Wenzel (1985, S. 19–20) der Normalschwerewert

$$\gamma(\varphi, h) = \gamma(\varphi) - 0,30877 \cdot 10^{-5} \cdot (1 - 0,00139 \cdot \sin^2 \varphi) \cdot s^{-2} \cdot h_{(m)} + 0,72 \cdot 10^{-12} \cdot m^{-1} \cdot s^{-2} \cdot h_{(m)}^2 - 0,91 \cdot 10^{-18} \cdot m^{-2} \cdot s^{-2} \cdot h_{(m)}^3 \quad (3)$$

mit den Parametern des GRS80 berechnet werden.

4 Schwerereduktionen

Für spezifische geodätische oder geophysikalische Fragestellungen muss der gemessene Schwerewert gewissen Reduktionen unterzogen werden. Welche Reduktionen im Einzelnen angebracht werden, hängt von der jeweiligen Zielsetzung ab. Das kann die Berechnung von Randwerten für die Geoid- oder Quasigeoidbestimmung sein. Des Weiteren ist es für zahlreiche Anwendungen erforderlich, dass die Schwereinformation auf einem regelmäßigen Gitter vorliegt. Dazu ist es numerisch sinnvoll, die punktwise vorliegenden Schwerewerte einer spektralen Glättung zu unterziehen, bevor eine Interpolation auf das gewünschte Datengitter erfolgt.

Im Folgenden werden die erforderlichen Schwerereduktionen dargelegt. Die auftretenden Vorzeichen werden so definiert, dass zunächst die Wirkung eines Einflusses im Schweremesspunkt angegeben wird. Durch Abzug der jeweiligen Wirkung vom Messwert resultiert somit der reduzierte Schwerewert.

4.1 Einfluss der Gezeiten

Der zeitvariable Einfluss der Gezeiten kann aus dem Gezeitenkatalog nach Hartmann und Wenzel (1995), z.B. mit dem Auswertprogramm ETERNA (Wenzel 1996), berechnet werden. Der Gezeiteneffekt wird an die originären Messwerte entsprechend Gl. (1) angebracht.

4.2 Höhenkorrektur (Freiluftreduktion)

Mit der Höhenkorrektur wird ein Schwerewert vertikal von einem Niveau auf ein anderes Niveau bezogen. Dies ist bereits bei der Messung erforderlich, wenn der am Gehäuse des Gravimeters markierte Messbezug auf einem anderen Höhenniveau als der vermarktete Messpunkt liegt. Bei einer Messgenauigkeit von etwa $\pm 5 \mu\text{Gal}$ und einem vertikalen Versatz von wenigen Dezimetern, der in der Praxis üblicherweise auftritt, folgt mit einem genäherten vertikalen Schweregradient von $0,3086 \text{ mGal} \cdot \text{m}^{-1}$, dass der Höhenunterschied besser als 2 mm genau bestimmt werden muss. Die Korrektur $\delta g_{\Delta h}$ wird bei der Auswertung an den Messwert angebracht (vgl. Gl. (1)), um ihn auf die Vermarktung zu beziehen. Eine weitere Anwendung findet die Höhenkorrektur, wenn es wie bei der Theorie von Stokes (Stokes 1849) erforderlich ist, die Randwerte von der Erdoberfläche auf das Geoid zu reduzieren.

Die Berechnung der Höhenkorrektur erfordert die genaue Bestimmung des vertikalen Wegs, entlang dessen der Schwerewert fortgesetzt werden soll. Eine größere Herausforderung ist die Ermittlung des verwendeten Schweregradienten. Der aktuelle Schweregradient dg/dh könnte an der Erdoberfläche mit hohem Aufwand bestimmt werden. Da er im Allgemeinen nicht bekannt ist, wird der Normalschweregradient $d\gamma/dh$ verwendet, der aus dem Normalschwerefeld berechnet wird (siehe Gl. (5)).

Nach Heiskanen und Moritz (1967, (2–131), S. 80) lautet die Formel für die Höhenreduktion, die auch als Freiluftreduktion bezeichnet wird, mit dem vertikalen Normalschweregradient, den Parametern des GRS80 (Moritz 1984) und Heck (2003b, S. 301):

$$\delta g_{\Delta h} = -0,30877 \cdot (1 - 0,00139 \cdot \sin^2 \varphi) \cdot 10^{-5} \cdot s^{-2} \cdot \Delta h + 0,72 \cdot 10^{-12} \cdot \text{m}^{-1} \cdot s^{-2} \cdot \Delta h^2. \quad (4)$$

Oft wird mit dem mittleren Schweregradienten in der Breite $\varphi = 45^\circ$ gearbeitet:

$$\frac{dg}{dh} \doteq -0,3086 \cdot 10^{-5} \cdot \text{m} \cdot s^{-2} \cdot \text{m}^{-1} = -0,3086 \text{ mGal} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (5)$$

4.3 Wirkung terrestrischer Massen

Unter terrestrischen Massen werden die atmosphärischen, topographischen, Eis- sowie Wassermassen verstanden.

Sie treten in unterschiedlichen räumlichen Verteilungen auf und unterscheiden sich wesentlich durch ihre Dichtewerte, die sie charakterisieren. Einen Einfluss auf die Berechnung und deren Genauigkeit haben zum einen die gewählte Diskretisierung der Massen (Form und Auflösung) und zum anderen die getroffene Dichteannahme. Bestenfalls können – falls verfügbar – digitale Dichtemodelle für eine verfeinerte Modellierung herangezogen werden.

4.3.1 Einfluss der Atmosphärenmassen

Der zeit- und höhenabhängige Einfluss der atmosphärischen Massen δg_{atm} auf die gemessene Schwere in Gl. (1) wird nach Torge (1989, S. 54) durch eine radial geschichtete Anordnung der atmosphärischen Massen approximiert:

$$\delta g_{\text{atm}} = (0,874 - 9,9 \cdot 10^{-5} \cdot H_{(m)} + 3,56 \cdot 10^{-9} \cdot H_{(m)}^2) \cdot \text{mGal}. \quad (6)$$

Durch diese Reduktion werden die atmosphärischen Massen zunächst entfernt und dann als Punktmasse in den Erdmittelpunkt verlagert. Damit bleibt die Gesamtmasse erhalten und es wird darüber hinaus der Forderung von Stokes nachgekommen, dass sich keine Massen außerhalb des Geoides befinden dürfen. Das Schwerfeld erfährt dadurch jedoch eine Veränderung. Bei der genannten Vorgehensweise bleibt der damit verbundene sogenannte indirekte Effekt auf das Geoid klein.

4.3.2 Einfluss der Topographie

Die Massen, die sich zwischen dem Geoid und der physischen Erdoberfläche befinden, bilden die Topographie. Ihre konkrete Dichte wird durch Dichtehypothesen approximiert. Die Dichte der Lithosphäre variiert zwischen 2400 bis $2800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, die des Mantelmaterials zwischen 3100 bis $5600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Die Dichte von Wasser wird mit $1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ und die von Eis mit $918 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ angenommen (Clauser 2016).

Zur Berechnung der topographischen Effekte sind digitale Geländemodelle (DGM) notwendig. Sie können sich in ihrer Auflösung (z.B. 10 m, 3") und im Koordinatensystem (Gauß-Krüger, UTM, geographisch (φ, λ)), in dem sie dargestellt sind, unterscheiden.

4.3.3 Einfluss des Geländes

Die Massen, die sich zwischen Erdoberfläche und dem Höhenniveau des Berechnungspunktes befinden, werden als Geländemassen bezeichnet. Ihre Wirkung δg_G auf den Schwerewert ist im Nahfeld des betreffenden Aufpunktes systematisch negativ. Der Effekt kann jedoch auch aufgrund der Erdkrümmung für weiter entfernte Geländemassen positiv sein, da Geländeerhebungen unter den Horizont des Aufpunktes abtauchen können. Die

Geländemassen aus dem Nahfeld des Aufpunktes sind wesentlich für die Variation der Schwerewerte verantwortlich. Die Geländereduktion weist die größte Variation unter den Reduktionen auf, da sie von den unmittelbaren Massenvariationen im Nahfeld des Aufpunktes am stärksten beeinflusst ist.

4.3.4 Einfluss der Bouguerplatte

Da die reale Topographie nur unzureichend durch eine ebene Platte approximiert wird, treten zahlreiche Autoren für die Verwendung einer sphärischen Bouguerschale ein (siehe z.B. Smith et al. 2001, Vaniček et al. 2001, Vaniček et al. 2004, LaFehr 1991a). Die Verhältnisse zwischen ebener und sphärischer Berechnung der Reduktionen werden in LaFehr (1991b) und Hackney und Featherstone (2003) diskutiert.

Für regionale und globale Anwendungen sollte keine ebene Approximation angenommen werden. Die topographische Reduktion kann entweder direkt aus digitalen Geländemodellen oder aus der Aufteilung in den Schwereinfluss δg_{sBP} einer sphärischen Bouguerplatte (Kugelschale konstanter Dicke) und des ebenfalls sphärisch diskretisierten Geländes δg_G zusammengesetzt werden.

Das Geoid ist die Randfläche der Randwertaufgabe nach Stokes. Massen außerhalb der Randfläche (Geoid) müssen durch eine Reduktion entfernt werden. Zur verfeinerten Modellierung wird in diesem Beitrag eine Bouguerplatte der Mächtigkeit H_p eingeführt, deren untere Begrenzungsfläche das Geoid selbst ist und somit eine variable Krümmung aufweist. Wie Abb. 2 zeigt, stellt diese »geoidale« Bouguerplatte eine exakte Modellierung der Realität dar, wohingegen die planare und sphärische Bouguerplatten lediglich Approximationen sind.

4.3.5 Einfluss isostatischer Massen

Aus dem Vergleich von aus astronomischen Beobachtungen abgeleiteten (5") mit aus lediglich topographischen Massen berechneten Lotabweichungen (28") im südlichen Himalaja stellte J.H. Pratt 1855 eine signifikante Diskrepanz fest. Diese Abweichungen lassen sich dadurch erklären, dass die sichtbaren bzw. topographischen Massen bezüglich des Geoids als Referenzfläche durch sogenannte isostatische Massen im Erdinneren kompensiert werden. Der Einfluss dieser isostatischen Massen auf Schweremessungen an der Erdoberfläche ist stets negativ und wird als isostatischer Effekt bezeichnet.

Diesen geophysikalischen Vorgang beschreibende Theorien wurden bereits Anfang des 20. Jahrhunderts aufgestellt (Hayford und Bowie 1912, Heiskanen 1924, 1928). In den Lehrbüchern von Heiskanen und Vening Meinesz (1958), Torge (2003), Torge und Müller (2012) oder Heiskanen und Moritz (1967) sind die Grundlagen der Isostasie dargestellt. Im Airy-Heiskanen Modell wird ein Schwimmgleichgewicht angenommen, das dadurch entsteht, dass topographischen Erhebungen Gebirgswurzeln

zugeordnet werden, die sich in die Lithosphärenplatte des dichteren Mantelmaterials eindrücken. Im isostatischen Modell von Pratt-Hayford stellt sich an einer Grenzfläche ein Druckgleichgewicht ein. Letzteres wird durch dichteres, aufliegendes Material erzeugt. Neben diesen lokalen Modellen stellt das Modell von Vening Meinesz, das auf der Theorie einer elastischen Platte basiert, ein regionales isostatisches Modell dar. Es wird eingehend in Abd-Elmotaal (1991) behandelt. Weitere Details sind in Heck (2003a) zu den Kompensationsmodellen nach Helmert entwickelt worden. Eine vertiefte Diskussion der Modellunterschiede und vergleichende Ergebnisse ihrer konkreten Anwendung sind z.B. in Grüninger (1990), Kuhn (2000), Flury (2002) und Gerlach (2003) dargestellt.

Die Gravitation der isostatischen Kompensationsmassen wird durch eine der gängigen isostatischen Reduktionen (Airy-Heiskanen, Pratt-Hayford, Vening Meinesz, Kondensationsmodelle nach Helmert) berücksichtigt. Auch sie werden durch die Tesseroidmodellierung (vgl. Abschnitt 4.3.6) berechnet. Aus den Parametern des jeweiligen benutzten isostatischen Modells lassen sich die Radien der Grund- und Deckflächen sowie der zu verwendende Dichtekontrast für die Berechnung des isostatischen Effekts ermitteln.

4.3.6 Berechnung der Masseneffekte mittels Tesseroiden

Zur Auswertung der Massenwirkungen auf die Schwere können verschiedene Massenkörper, wie z.B. Prismen (Mader 1951, Nagy 1966, Nagy et al. 2000, 2002) oder Tesseroiden (Seitz und Heck 2001, Heck und Seitz 2007, Wild-Pfeiffer 2008, Grombein et al. 2013, Grombein 2017), verwendet werden. In diesem Beitrag werden die Massenelemente durch Tesseroiden diskretisiert (siehe Abb. 1). Durch sie wird automatisch die Krümmung der Erdoberfläche berücksichtigt, wohingegen das Ergebnis

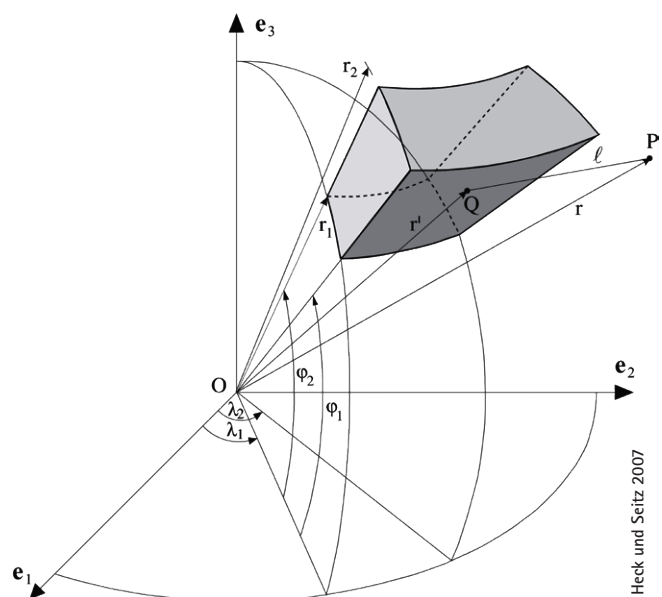


Abb. 1: Geometrie eines sphärischen Tesseroids

der Prismenauswertung zusätzlich vom Prismensystem in das Aufpunktsystem des Berechnungspunktes transformiert werden muss. Ein weiterer wichtiger Vorteil der Tesseroidformeln ist ihre im Vergleich zur Berechnung des Schwereeffekts mit Prismenformeln um den Faktor vier schnellere Rechenzeit (siehe Heck und Seitz 2007).

In die Auswertformeln gehen u. a. die geozentrisch sphärischen Koordinaten des geometrischen Mittelpunktes des Tesseroids $Q(\varphi_0, \lambda_0, r_0)$ und seine Dimensionen $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ und $\Delta r = r_2 - r_1$ ein.

In zahlreichen Studien wurde die am KIT entwickelte Tesseroidmethode aufgegriffen, erweitert oder auf spezielle Anwendungen adaptiert, wie nachstehend genannte aktuelle Publikationen zeigen. Marotta und Barzaghi (2017) geben eine Lösung für das Potential und die Schwerewirkung in lokalen Polarkoordinaten an. Diese Vorgehensweise wird in Marotta et al. (2019) mit dem KIT-Ansatz verglichen. Eine Anwendung auf die dritten Ableitungen des Potentials wird in Deng und Shen (2018) vorgenommen. In Lin und Denker (2019) wird der Approximationsfehler im direkten Nahfeld des Aufpunktes untersucht und durch eine verfeinerte Modellierung der Massenwirkung in der unmittelbaren Nachbarschaft des Aufpunktes verbessert. Ebenso wird der Dichteverlauf im Innern eines Tesseroids durch eine lineare Dichtefunktion modelliert.

5 Schwerereduktionen und Schwereanomalien

Aus Schweremessungen abgeleitete Schwereanomalien nehmen eine zentrale Rolle in der Physikalischen Geodäsie bei der Lösung der geodätischen Randwertaufgabe ein. Sie gehen als Randwerte in die Bestimmung des äußeren Schwerfeldes der Erde und damit auch der physikalischen Erdfigur ein. Wegen ihrer Sensitivität bezüglich der Dichteverteilung in der Erdkruste und im Erdmantel werden Schwereanomalien auch in den Geowissenschaften zur Untersuchung des Aufbaus der Erde bzw. Prospektionszwecken verwendet. Wie aus Tab. 1 deutlich wird, sind die Einflüsse der Topographie und von Dichteanomalien um vier bis fünf Größenordnungen vom Zentralterm, Erdabplattung und Zentrifugalananteil überlagert. Variationen werden erst signifikant in der skalaren Schwereanomalie Δg erkennbar. Sie ist definiert als gemessener Schwerewert g , der um die Wirkung γ eines Niveauellipsoids (vgl. Somigliana-Pizzetti Normalschwerfeld, Abschnitt 3) reduziert ist:

$$\Delta g := g - \gamma. \quad (7)$$

Schwereanomalien stellen die Datengrundlage zur Berechnung von Geoid- und Quasigeoidlösungen dar und werden u. a. in den erwähnten Anwendungsgebieten zur interpretatorischen Auswertung eingesetzt. Die theoretischen Voraussetzungen für die Geoidlösung nach

Stokes (1849) oder für die Quasigeoidlösung nach Molodenskii et al. (1962) führen auf zwei grundsätzlich unterschiedliche Typen von Schwereanomalien Δg . Prinzipiell wird dabei ein Schwerewert g aus dem Schwerfeld der Erde mit einem berechneten Normalschwerewert γ , wie in Gl. (7) angegeben, verglichen.

5.1 Die Schwereanomalie in der Theorie von Stokes

Das Geoid ist die Höhenbezugsfläche für orthometrische Höhen. In der von Stokes (1849) entwickelten Theorie sind zwei Bedingungen von besonderer Bedeutung: i) Außerhalb des Geoids dürfen keine Massen vorhanden sein und ii) die Randwerte zur Lösung der Randwertaufgabe müssen auf dem Geoid selbst vorliegen.

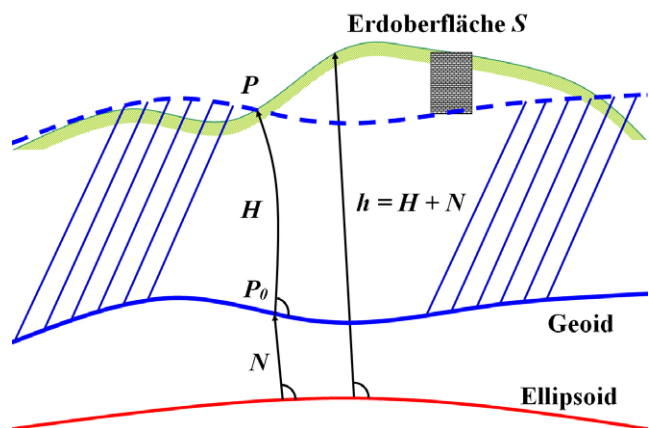


Abb. 2: Geoid und geoidale Bouguerplatte (schraffiert)

Der ersten Forderung wurde zum Teil bereits durch die Gezeitenreduktion und Reduktion der atmosphärischen Massen Rechnung getragen. Die verbliebenen Massen zwischen Erdoberfläche und Geoid werden durch Tesseroiden diskretisiert und mittels einer topographischen Reduktion ($-\delta g_{topo}$) gedanklich in das Unendliche portiert. Die Radien der unteren und oberen Begrenzungsflächen eines jeden Tesseroids berechnen sich gemäß Abb. 1 und Abb. 2 aus:

$$\begin{aligned} r_2 &= r_E(\varphi_0) + N + H = r_E(\varphi_0) + h, \\ r_1 &= r_E(\varphi_0) + N. \end{aligned} \quad (8)$$

Dabei ist $r_E(\varphi_0)$ der geozentrische Radius des Lotfußpunktes des Tesseroidmittelpunktes mit der Breite φ_0 . Seine Grundfläche liegt in diesem Fall auf dem Geoid und hat somit die ellipsoidische Höhe $h = N$. Die zugehörige Deckfläche hat die ellipsoidische Höhe $h = N + H$. Für lokale Anwendungen, bei denen es primär um die Ermittlung von Dichteanomalien geht, wird klassischerweise der topographische Effekt δg_{topo} aus der Wirkung einer planaren Bouguerplatte δg_B und der im Abschnitt 4.3.3 beschriebenen Geländewirkung δg_G zusammengefügt:

$$\delta g_{topo} = \delta g_B + \delta g_G. \quad (9)$$

Wie weiter unten erläutert wird, ist diese Aufteilung für globale und regionale Modellierungen nicht zu empfehlen.

Wird zur Berechnung der Bouguerreduktion eine ebene, unendlich ausgedehnte Bouguerplatte (Abb. 3) mit konstanter Dichte ρ zwischen Geoid und Aufpunkt P mit der Mächtigkeit $d = H_p$ angenommen, so ist deren Schwerewirkung in P durch (Torge 2003, Gl. 6.115)

$$\delta g_B = 2\pi \cdot G \cdot \rho \cdot d, \quad d > 0 \quad (10)$$

bestimmt. Die Bouguerreduktion entspricht dem negativen Einfluss einer solchen Platte und wird deshalb im ebenen Fall auch Bouguer'sche Plattenreduktion genannt. Es sei darauf hingewiesen, dass die Attraktion einer unendlich ausgedehnten ebenen Platte nach Gl. (10) in jedem beliebigen Punkt auf oder außerhalb der Bouguerplatte konstant ist. Mit der Newton'schen Gravitationskonstanten $G = 6,67259 \cdot 10^{-11} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ und der Annahme eines Dichtewertes von $\rho = 2670 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ gilt für die sogenannte einfache Bouguer'sche Plattenreduktion (simple Bouguer reduction)

$$\delta g_B = 0,11194 \cdot \text{mGal} \cdot \text{m}^{-1} \cdot H_p. \quad (11)$$

Die Schwerewirkung einer sphärischen Platte (Kugelschale der Mächtigkeit $d = r_2 - r_1$) mit homogener Dichte ρ ist für einen Punkt $P(r_p)$ gegeben durch

$$\delta g_{sB}(r_p, r_1, r_2) = \frac{4\pi \cdot G \cdot \rho}{3r^2} \cdot \begin{cases} r_2^3 - r_1^3, & r_p \geq r_2 \\ 0, & r_p \leq r_1 \end{cases} \quad (12)$$

Mit r_1 ist gemäß Abb. 3 der Radius der Hohlkugel und mit r_2 der äußere Radius der Kugelschale bezeichnet. Werden Terme der Ordnung d/r und h/r vernachlässigt, ergibt sich im Außenraum der Kugelschale die Approximation für die Schwerewirkung einer homogenen Kugelschale der Dichte ρ , der sphärischen Bouguer'schen Plattenreduktion zu:

$$\delta g_{sB}(r_p, r_1, r_2) \doteq 4\pi \cdot G \cdot \rho \cdot d, \quad r_p \geq r_2 > r_1. \quad (13)$$

Im Rahmen der sphärischen Bouguer Plattenreduktion befindet sich der Aufpunkt auf der Kugelschale. Somit gilt $d = r_2 - r_1 = r - r_1 = H_p$ und es resultiert die Gleichung

$$\delta g_{sB}(r_p, r_1, r_2) \doteq 4\pi \cdot G \cdot \rho \cdot H_p, \quad r_p = r_2 > r_1. \quad (14)$$

Das entspricht dem doppelten Effekt der ebenen Bouguer Plattenreduktion aus Gl. (10).

Zur Berechnung der Geländereduktion δg_G ist ein DGM in Form eines regelmäßigen Rasters in sphärischen Koordinaten (geographische Länge und Breite) oder in Gauß-Krüger-, UTM-Koordinaten erforderlich. Im Fall sphärischer Koordinaten begrenzen die Parameterlinien sogenannte Tesseroide (Abb. 1), deren Schwerewirkung

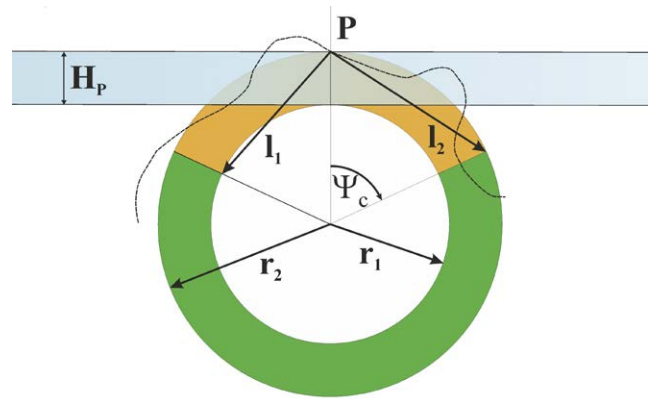


Abb. 3: Ebene Bouguerplatte, Kugelkappe und Kugelschale

nach Heck und Seitz (2007) ermittelt werden kann. Liegt z.B. ein UTM-Gitter vor, findet die Prismenformel (Grüninger 1990, Kuhn 2000, Mader 1951, Nagy et al. 2000) Anwendung oder es muss zunächst das UTM-Gitter auf ein sphärisches Gitter interpoliert werden.

Der im Oberflächenpunkt P gemessene Schwerewert g_P wird nun durch eine Freiluftreduktion

$$\delta g_{F=} = -\frac{dg}{dh} \cdot H_p \doteq -\frac{d\gamma}{dh} \cdot H_p = -0,3086 \cdot \text{mGal} \cdot \text{m}^{-1} \cdot H_p \quad (15)$$

in den Fußpunkt P_0 auf das Geoid reduziert und mit dem Normalschwerewert $\gamma_E(\varphi_p)$ am Ellipsoid verglichen.

Aus der Kombination der genannten Reduktionen können unterschiedliche Anomalien definiert und berechnet werden. Sie weisen individuelle Charakteristiken auf und eignen sich somit für unterschiedliche Anwendungen.

5.1.1 Die Freiluftanomalie

Durch Anbringen der Freiluftreduktion (Gl. (15)) an den gemessenen Schwerewert und Vergleich mit dem Normalschwerewert am Ellipsoid entsteht die Freiluftanomalie. Lediglich der Anteil der Fortsetzung nach unten (bei freier Luft) wird berücksichtigt:

$$\Delta g_F = g_P - \delta g_F - \gamma_E(\varphi). \quad (16)$$

Sie ist abhängig vom (hypothetisch) angenommenen Freiluftgradienten. Die Wirkung der lokalen Topographie bleibt enthalten. Das ist sehr deutlich in den Ergebnissen im Kapitel 7 zu erkennen.

5.1.2 Die Bougueranomalie

Wird die Freiluftanomalie um den Einfluss der topographischen Massen bereinigt, so entsteht die Bougueranomalie

$$\Delta g_B = g_P - \delta g_F - \delta g_{topo} - \gamma_E(\varphi). \quad (17)$$

Sie weist einen deutlich glatteren Verlauf als die Freiluftanomalie auf. Dies ist auch in den Resultaten sehr

gut erkennbar. Sie eignen sich somit gut zur Interpolation und Prädiktion. Dadurch besitzt die Bougueranomalie eine große Bedeutung in den Geowissenschaften zur lokalen oder regionalen Dichtebestimmung. Allerdings ist sie direkt von dem (hypothetisch) angenommenen Dichteverlauf abhängig. Ihre Interpretation im Rahmen der Prospektion ermöglicht die Lokalisierung der Lagerstätten von Rohstoffen (Kohle, Salzstöcke, Erzlager, etc.), die durch ihren Dichtekontrast in den Bougueranomalien hervortreten. Weitere Anwendungsgebiete kommen aus der Geologie und Geophysik.

Sollen Bougueranomalien zur lokalen oder regionalen Interpretation der Dichteverhältnisse im Untergrund berechnet werden, wird hierzu die topographische Reduktion δg_{topo} üblicherweise aus einer ebenen Bouguerplattenreduktion δg_B sowie der Geländereduktion δg_G zusammengesetzt. Die Geländereduktion bezeichnet die Wirkung der Massen, die sich zwischen der Erdoberfläche und einem Bezugsniveau befinden. Dieses Niveau entspricht der oberen Begrenzungsfläche der Bouguerplatte. Die Bouguerplatte liegt zwischen Aufpunkt und Geoid. Im Anwendungsfall einer planaren Bouguerplatte sollte aus Konsistenzgründen das Geländemodell auf das planar approximierte Geoid aufgesetzt werden. Das hat zur Folge, dass bei der Geländereduktion die Erdkrümmung außer Acht gelassen wird.

Um lokale Aussagen über Dichteveränderungen zu erhalten reicht es aus, den Schwerewert g_P um den Einfluss der gravitierenden Massen in unmittelbarer Umgebung vom Aufpunkt durch die entsprechenden Reduktionen zu berücksichtigen und die Freiluftreduktion anzubringen. Für Anwendungen niedriger Genauigkeit oder in Ermangelung eines DGM wird die einfache Bougueranomalie verwendet:

$$\Delta g_{B, simple} = g_P - \delta g_F - \delta g_B - \gamma_E(\varphi). \quad (18)$$

Demzufolge wird die in Gl. (17) definierte Bougueranomalie auch als verfeinerte Bougueranomalie bezeichnet. Diese Bezeichnung ist sowohl für die planare als auch für die sphärische Berechnungsvariante gebräuchlich.

Gemäß der Annahme hinsichtlich der Geometrie der Bouguerplatte kann diese in drei Untergruppen aufgeteilt werden:

- a) Planare Bouguerplatte: Wirkung nach Gl. (10) bzw. Gl. (11), nur für lokale Anwendung empfehlenswert, da der langwellige globale Anteil nicht berücksichtigt ist.
- b) Sphärische Bouguerplatte: Wirkung nach Gl. (14), für regionale und globale Anwendung bei gleichzeitiger Berücksichtigung des globalen topographischen Effekts. Die Elliptizität der Erde bleibt unberücksichtigt.
- c) Geoidale Bouguerplatte: Wirkung lässt sich aus der Differenz der topographischen Effekte und der Geländeeffekte berechnen. Sie ist begrenzt durch das Geoid und die durch den Berechnungspunkt P verlaufende parallele Fläche zum Geoid. Sie weist die Mächtigkeit H_P auf.

5.1.3 Die Faye-Anomalie

Wird bei der Aufspaltung der Topographie in eine Bouguerplatte und dem Gelände zur Auswertung von Gl. (17) die Bouguerplattenreduktion nicht angebracht, entstehen die Faye-Anomalien:

$$\Delta g_{Faye} = g_P - \delta g_F - \delta g_G - \gamma_E(\varphi). \quad (19)$$

Von Moritz (1968) wird gezeigt, dass die Geländereduktion eine Approximation erster Ordnung des Molodenskii-Terms G_1 darstellt. Letzterer wird zur Glättung der Schwereanomalien nach Molodenskii herangezogen.

5.1.4 Die isostatische Anomalie

Im Konzept der Isostasie sind den sichtbaren Massen der Topographie gewisse Kompensationsmassen zugeordnet. Ihre rechnerische Beseitigung geschieht durch die isostatische Reduktion ($-\delta g_I$). Auf die gängigen Modelle zur isostatischen Reduktion wie Airy-Heiskanen, Pratt-Hayford, Kondensationsmodelle nach Helmert (Kuhn 2000, Heck 2003a) wird hier nicht näher eingegangen. Die isostatische Schwereanomalie ist hypothesenbehaftet, da die verwendeten Freiluftgradienten und Dichten für die topographischen und isostatischen Massen lediglich Näherungen der realen Verhältnisse darstellen. Dazu kommen die verschiedenen Annahmen bezüglich der isostatischen Theorien. Die isostatische Anomalie lautet:

$$\Delta g_I = g_P - \delta g_F - \delta g_B - \delta g_G - \delta g_I - \gamma_E(\varphi). \quad (20)$$

Sie wird teilweise im Rahmen der Geoidberechnung (Kuhn 2000) verwendet.

5.2 Die Schwereanomalie in der Theorie von Molodenskii

Während in der Theorie von Stokes (1849) Annahmen über die Dichte (topographische und isostatische Reduktion) und den Freiluftgradienten zu treffen sind und somit auf eine hypothesenbehaftete Lösung führen, verzichtet Molodenskii et al. (1962) auf die Annahme von Hypothesen. Die Schwereanomalie nach Molodenskii ist eine Freiluftanomalie, die im Zuge der Linearisierung der skalar freien geodätischen Randwertaufgabe nach Molodenskii als Differenz zwischen dem auf der Erdoberfläche gemessenen Schwerewert g_P und einem streng berechenbaren Modellwert γ_Q im zugeordneten Telluroidpunkt Q ohne Annahme einer Hypothese berechnet werden kann:

$$\Delta g = g_P - \gamma_Q. \quad (21)$$

Bei der skalarfreien Randwertaufgabe (Heck 1989, Seitz 1997) sind als Randwerte die horizontale Position in Form der geographischen Koordinaten (φ_P, λ_P) , der

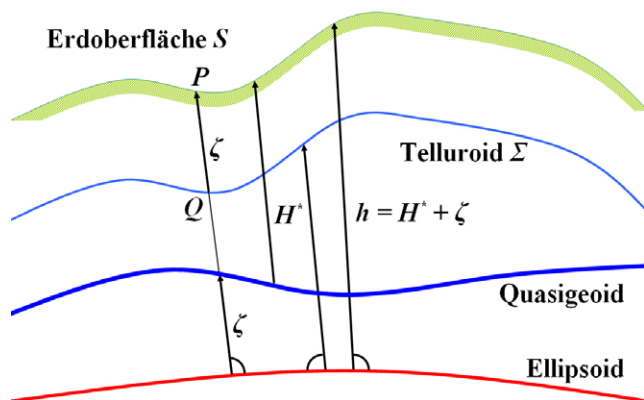


Abb. 4: Ellipsoid, Telluroid und Quasigeoid

gemessene Schwerewert g_P sowie die geopotentielle Kote $C_P = W_0 - W_P$ des Beobachtungspunktes P gegeben. Daraus lässt sich eindeutig die Position des Telluroidpunktes entlang der durch P verlaufenden Ellipsoidnormalen berechnen. Die Normalhöhe H^* bezieht sich auf das Quasigeoid als Höhenreferenzfläche. Der ellipsoidische Abstand zwischen Ellipsoid und Quasigeoid ist die Höhenanomalie ζ . Die geometrischen Verhältnisse sind in Abb. 4 dargestellt.

Tab. 2: Schweremesspunkte

Datenquelle	# Punkte
Schweremesspunkte	59660
davon Landesvermessung	24869
davon BGI	11182
davon Schweiz	12235
davon Österreich	176
davon Prof. H.-G. Wenzel	11198

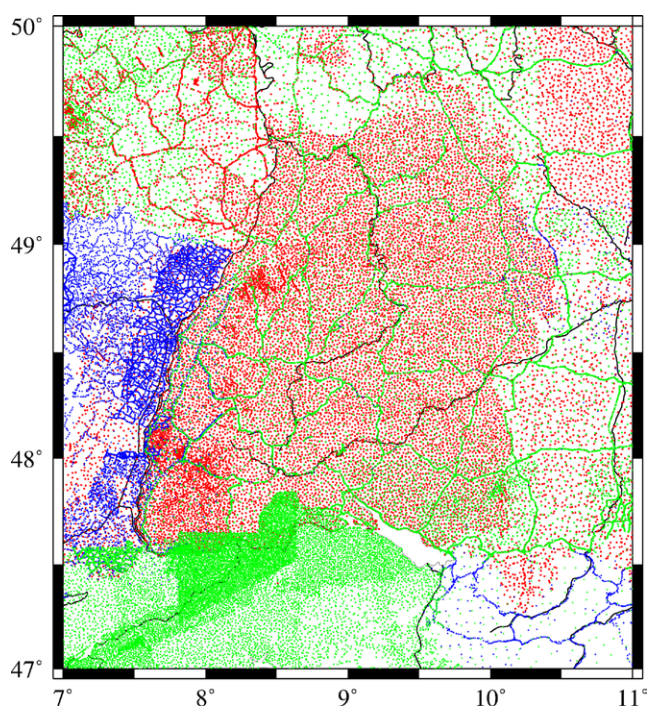


Abb. 5: Verteilung der verwendeten Schweremesspunkte

6 Datengrundlage zur Fallstudie Baden-Württemberg

Die Topographie von Baden-Württemberg ist geprägt durch den Oberrheingraben im Westen, den zentralen Schwarzwald und die Schwäbische Alb im Osten, deren Höhen als Mittelgebirge zwischen 120 m und 1493 m betragen. Der Feldberg im Südschwarzwald ist die höchste Erhebung Deutschlands außerhalb der Alpen. Damit ist das Gebiet von Baden-Württemberg ausgezeichnet geeignet für eine Fallstudie zur Berechnung der im Abschnitt 5 beschriebenen Schwereanomalien.

Hierzu wurden dem Geodätischen Institut Karlsruhe (GIK) u. a. vom Landesamt für Geoinformation und Landentwicklung in Baden-Württemberg (LGL) hochaufgelöste Schweredaten und digitale Geländemodelle zur Verfügung gestellt, die nachstehend beschrieben werden.

6.1 Verwendete Schweredaten

Die verwendeten Punktschwerewerte aus verschiedenen Quellen (LGL Baden-Württemberg, Landesvermessungen von Bayern, Rheinland-Pfalz, Hessen, Deutsches Schwerearchiv DSA, Bureau Gravimétrique International BGI) lagen alle im Schweredatum IGSN71 vor (vgl. Tab. 2). Bei einer weiteren Verdichtung der Schweremessungen mittels Absolutgravimetern wird das Schweredatum implizit realisiert, ohne Netzanschluss an das Schweresystem. Die zugehörigen Lagekoordinaten wurden aus den jeweiligen Landessystemen auf das Datum WGS84 transformiert und in geographische Koordinaten umgerechnet.

Die Verteilung der Schweremesspunkte im Arbeitsgebiet (Nahbereich) ist in Abb. 5 wiedergegeben. Mit den 59660 verwendeten Punkten liegt eine mittlere Punktdichte von ca. 0,6 Punkte/km² vor.

6.2 Verwendete digitale Geländemodelle

Die Geometrie der Topographie und damit die räumliche Verteilung der Massen ist durch Geländemodelle digitalisiert. Im Rahmen der Untersuchung verschiedener Schwereanomalien gehen sie als zentrale Ausgangsdaten in die Berechnung der Gelände-, der topographischen und der isostatischen Reduktion ein.

6.2.1 Digitales Geländemodell für den Nahbereich

Zur Modellierung der Geländetopographie wurde ein hochaufgelöstes Digitales Geländemodell verwendet, das vom LGL Baden-Württemberg bereitgestellt wurde (Gültlinger et al. 2001, Schleyer 2001). Es weist eine Rasterweite von 10 m × 10 m in Gauß-Krüger-Koordinaten (DHHN) auf. Dieses DGM wurde auf ein äquidistantes Gitter in geographischen Koordinaten (WGS84) transformiert. Die

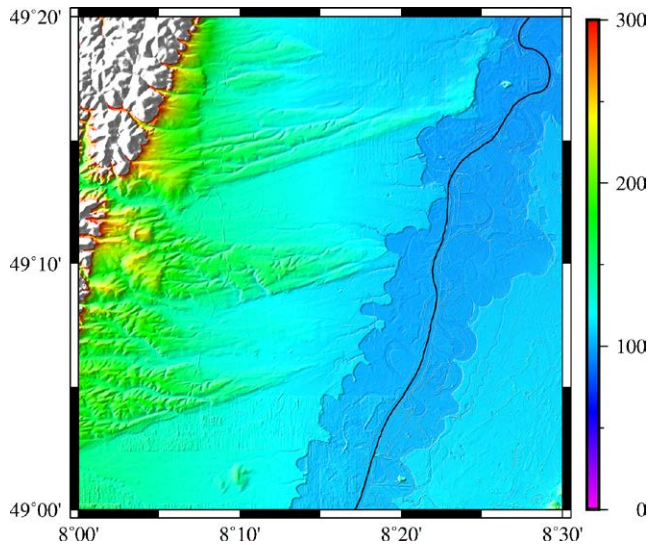


Abb. 6: Kachel aus dem hochaufgelösten DGM (m)

äquivalenten Rasterweiten betragen $\Delta\varphi = 0,333''$ und $\Delta\lambda = 0,5''$. Die in Abb. 6 dargestellte DGM-Kachel (nördlich von Karlsruhe) zeigt die sehr hoch aufgelöste Topographie des Rheingrabens sowie der Vogesen. Das gesamte Testgebiet liegt in den Bereichsgrenzen $47^\circ \leq \varphi \leq 50^\circ$ und $7^\circ \leq \lambda \leq 11^\circ$. Es ist in 72 Kacheln segmentiert.

6.2.2 Digitales Geländemodell für den Fernbereich

Der Fernbereich in den Bereichsgrenzen $39^\circ \leq \varphi \leq 58^\circ$ und $-2^\circ \leq \lambda \leq 20^\circ$ wurde mit dem SRTM3 Modell (Jarvis et al. 2008) dargestellt. Dieses Topographiemodell weist eine Auflösung von $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 3''$ auf. Es wurde aus den Daten der Shuttle Radar Topography Mission (Farr et al. 2007) erstellt.

6.2.3 Digitales Modell für die Höhenbezugsfläche

Bei den Geländemodellen handelt es sich um Normalhöhen. Um die Schweremesspunkte und die Topographie räumlich bestmöglich einander zuzuordnen, werden die Höhen auf ein Quasigeoidmodell aufgesetzt, das sich wiederum auf das GRS80 Referenzellipsoid bezieht (siehe Abb. 4). Somit wird eine optimale relative und absolute dreidimensionale Anordnung der Massen und der Auf-

punkte erreicht. Die Höhenanomalien zur Darstellung der Höhenbezugsfläche wurden aus dem EGM2008 Modell (Pavlis et al. 2012, 2013) in allen Gitterpunkten synthetisiert.

7 Ergebnisse

Im Folgenden werden die erläuterten Schwerereduktionen sowie die daraus resultierenden unterschiedlichen Schwereanomalien dargestellt.

7.1 Berechnete Schwerereduktionen

Sämtliche Schwerereduktionen sind funktional abhängig von der Topographie. Das verwendete Höhenmodell von Baden-Württemberg, das im hochaufgelösten Ausschnitt in Abb. 6 und komplett in Abb. 7 dargestellt ist, zeigt die interessante Variation der Topographie. Sie ist charakterisiert durch die Mittelgebirge im Westen mit den Vogesen, rechtsrheinisch der Schwarzwald und entlang der Donau die Schwäbische Alb. Im Südosten zeichnen sich die Alpen ab. Deutlich prägt die Rheinebene das Bild durch den mit Sedimenten gefüllte Grabenbruch.

Werden die Punkthöhen H_p mit dem negativen Schweregradienten multipliziert, so wird die Freiluftreduktion erhalten. Aus einer Multiplikation der Höhe mit einem Faktor $0,11194 \text{ mGal} \cdot \text{m}^{-1}$, gemäß Gl. (11), resultiert die einfache planare Bouguerplattenreduktion. Den doppelten Effekt weist die sphärische Bouguerplattenreduktion auf (vgl. Gl. (14)). Auf eine Darstellung dieser linear von der Höhe abhängigen Reduktionen wird verzichtet. Ihre statistischen Kenngrößen sind in Tab. 3 zusammengestellt.

Die Geländereduktion zeigt sich in der Rheinebene mit einem glatten Verlauf um $\pm 0 \text{ mGal}$ (siehe Abb. 8). Das ist erklärbar durch die geringen Geländevariationen und das schnelle Abklingen der Wirkung der Geländemassen mit dem Abstand zum Berechnungspunkt. Ihre Berechnung ist extrem rechenzeitintensiv. Sie wurde auf dem Hochleistungsrechner des SCC (Steinbuch Centre for Computing, KIT) parallel auf 160 CPUs durchgeführt.

Tab. 3: Statistische Kenngrößen der Schwerereduktionen in Baden-Württemberg (B-W)

Reduktion (mGal)	Min	Max	Mittel	RMS	Std
Freiluftreduktion	-913,912	-24,724	-136,225	155,838	75,684
Bouguerplatte planar	8,968	331,479	49,409	56,523	27,451
Bouguerplatte sphärisch	17,715	475,718	91,081	102,265	46,502
Bouguerplatte geoidal	7,551	305,643	49,878	57,167	27,933
Geländereduktion	-65,797	0,234	-1,344	3,265	2,975
Topographische Reduktion (komplett)	5,698	276,063	49,689	56,454	26,796
Topographische Reduktion aus B-W DGM (Nahbereich)	5,651	267,868	48,534	55,198	26,293

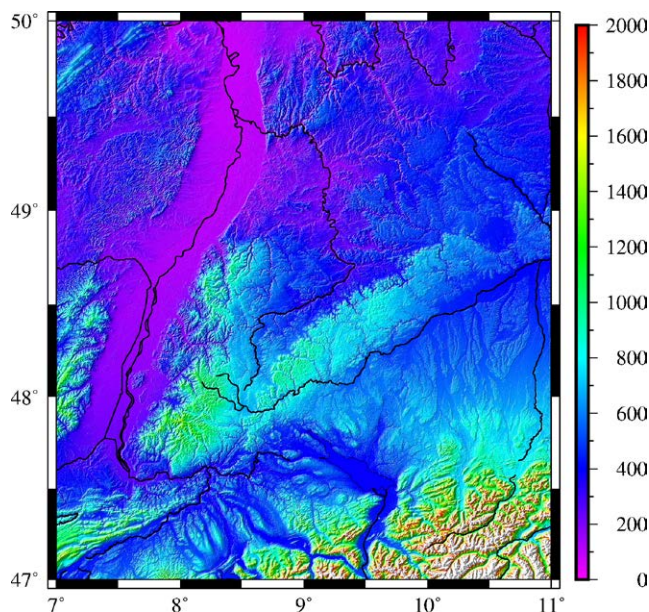


Abb. 7: Höhenmodell von Baden-Württemberg (m)

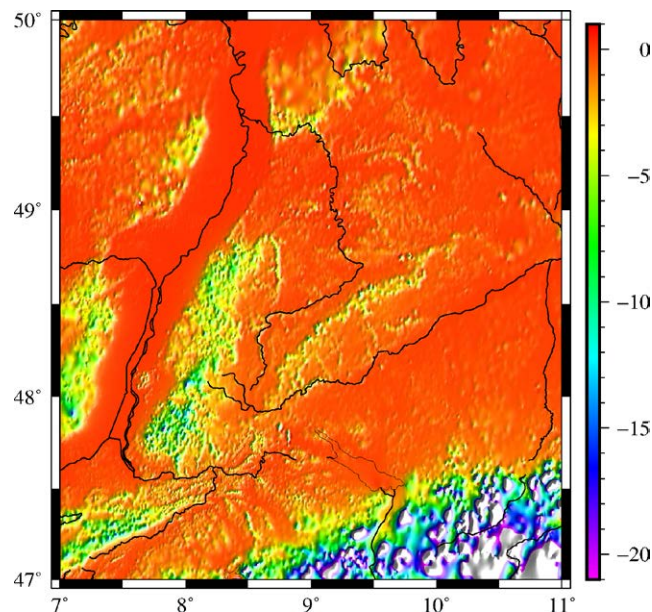


Abb. 8: Geländereduktion (mGal)

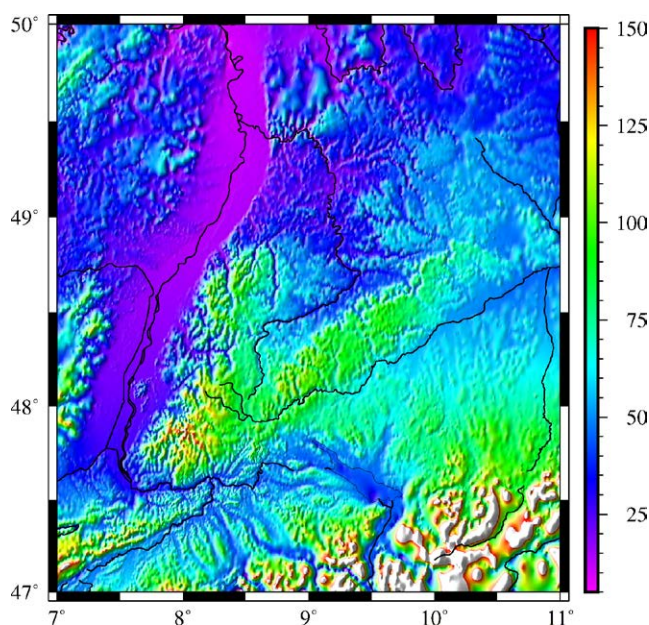


Abb. 9: Topographische Wirkung (mGal)

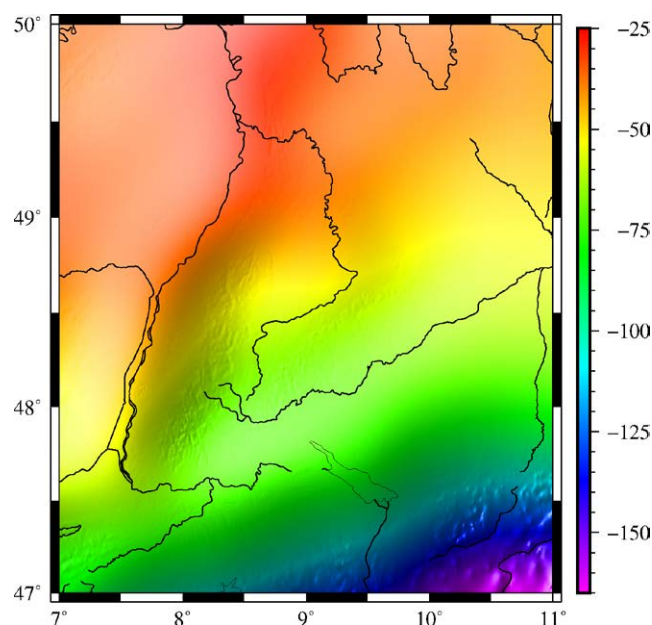


Abb. 10: Isostatische Wirkung (mGal)

Die Wirkung der topographischen Massen zwischen Geoid und Erdoberfläche wird für den Nahbereich (NB) und Fernbereich (FB) berechnet. Die entfernteren topographischen Massen aus dem Fernbereich erreichen eine Wirkung im Berechnungsgebiet von ± 2 mGal, abgesehen von Nahfeldwirkungen im Süden durch die Alpen.

Im verwendeten isostatischen Modell nach Airy-Heiskanen befinden sich die Ausgleichmassen an der Grenzschicht zwischen Kruste und Mantel. Für die Mächtigkeit der Kruste wird ein Wert von $T = 30$ km angenommen. Hieraus ergeben sich glatte, mittelwellige Feldanteile, die im kontinentalen Bereich systematisch positiv sind.

In der gesamten topographischen Wirkung zeigt sich deutlich die Struktur der Topographie, wohingegen die isostatische Wirkung einen sehr glatten Verlauf aufweist.

Wie in Abb. 9 und Abb. 10 zu erkennen, sind ihre Vorzeichen einander entgegengesetzt.

Aus den punktwise berechneten Schwerereduktionen können nun Schwereanomalien berechnet werden.

7.2 Berechnete Schwereanomalien

Wie in Abb. 11 deutlich zum Ausdruck kommt, weist die Freiluftanomalie eine starke Korrelation mit der Geländehöhe auf, da die Effekte der Topographie noch komplett enthalten sind. Wird die Geländereduktion an die Freiluftanomalie angebracht, resultiert die in Abb. 12 dargestellte Faye-Anomalie. Geringe Unterschiede zwischen den beiden Anomalien zeigen sich in den Alpen.

Die Faye-Anomalie ist eine gute Approximation für die in Gl. (21) definierte Schwereanomalie in der Theorie von Molodenskii.

Werden die Freiluftanomalien um die topographischen Effekte reduziert, werden die in Abb. 13 dargestellten Bougueranomalien erhalten. Die gezeigten Bougueranomalien wurden gemäß Gl. (17) berechnet, wobei die topographische Reduktion unter Verwendung der DGM aus dem Nah- und Fernbereich berechnet wurde. Die Bougueranomalien weisen noch mittel- bis langwellige Strukturen auf.

Die Berücksichtigung einer isostatischen Reduktion (hier Airy-Heiskanen) führt auf die in Abb. 14 dargestellten isostatischen Anomalien. Sie weisen einen glatten Verlauf auf. Dies kommt auch durch den deutlichen

Abfall des RMS zum Ausdruck. Siehe hierzu die statistischen Kenngrößen der untersuchten Schwereanomalien in Tab. 4. Die isostatischen Anomalien eignen sich besonders gut zur Interpolation der beliebig verteilten Messpunktwerte auf ein Gittermodell. Sie bilden die Datengrundlage zur Geoidberechnung bei der Lösung der Randwertaufgabe nach Stokes.

Um zu verdeutlichen, dass die aus Schwerefeldmissionen gewonnenen Potentialdarstellungen eine geringere Auflösung als terrestrische Anomalien aufweisen, werden die zugehörigen Schwereanomalien berechnet. In Abb. 15 sind die aus dem reinen GOCE-Satellitenmodell TIMr5 (Brockmann et al. 2014) bis Grad und Ordnung $N = 280$ synthetisierten Schwereanomalien dargestellt. Im Kombinationsmodell mit EGM2008 (Pavlis et al. 2012, 2013)

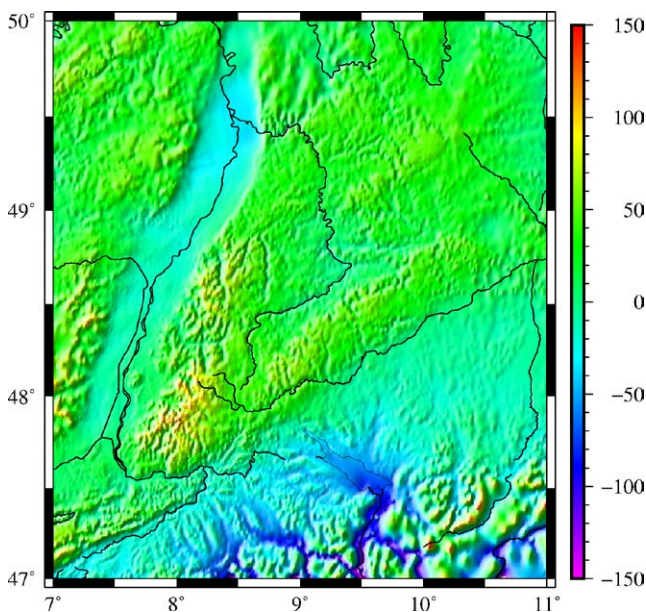


Abb. 11: Freiluftanomalien (mGal)

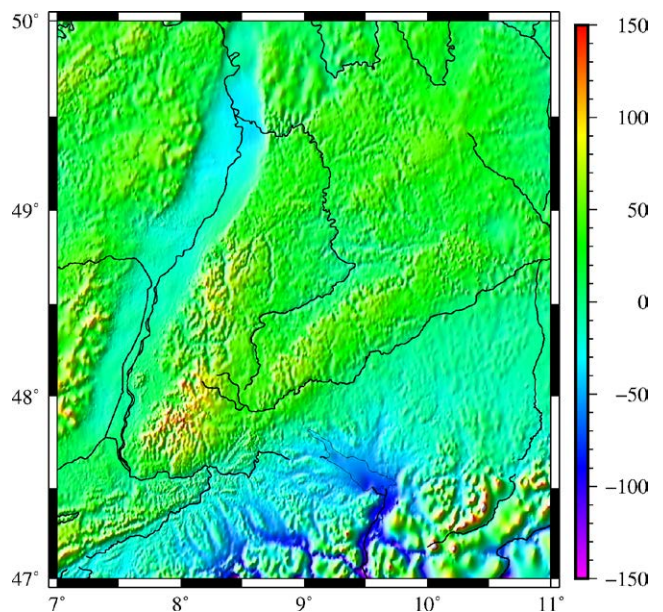


Abb. 12: Faye-Anomalie (mGal)

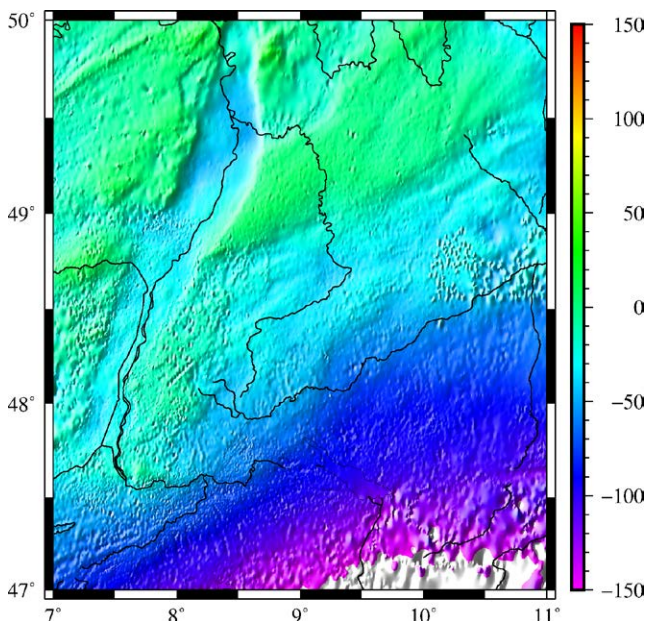


Abb. 13: Bouguer-anomalie (mGal)

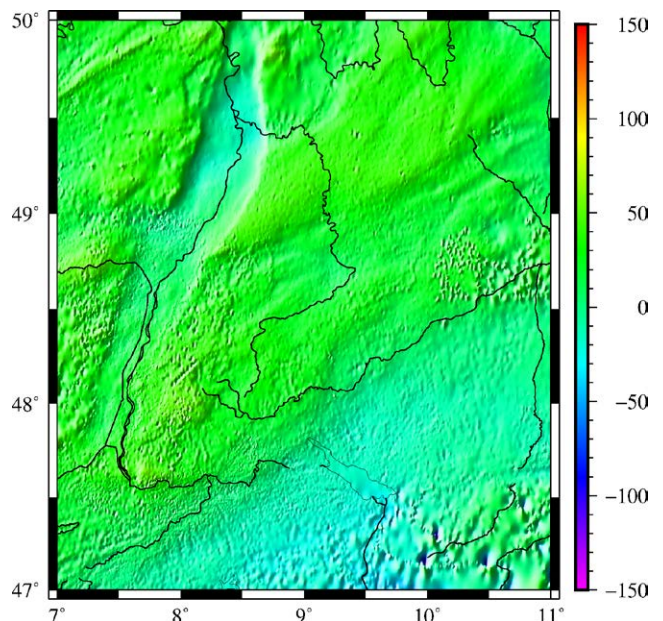
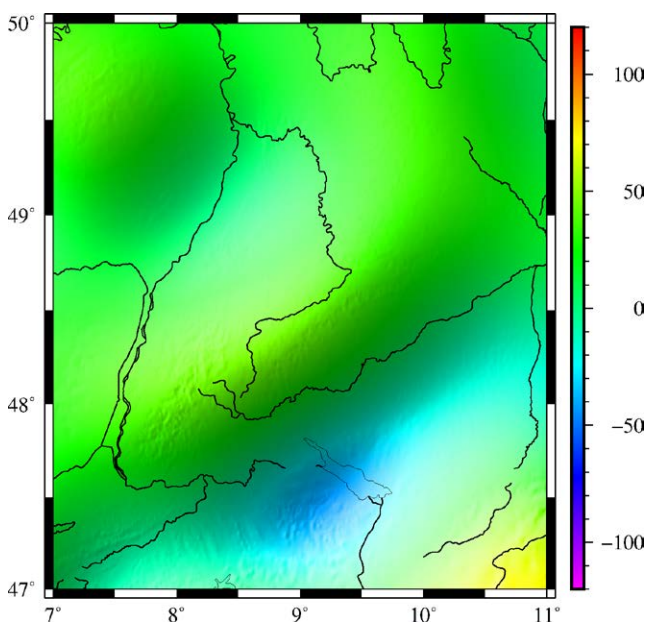
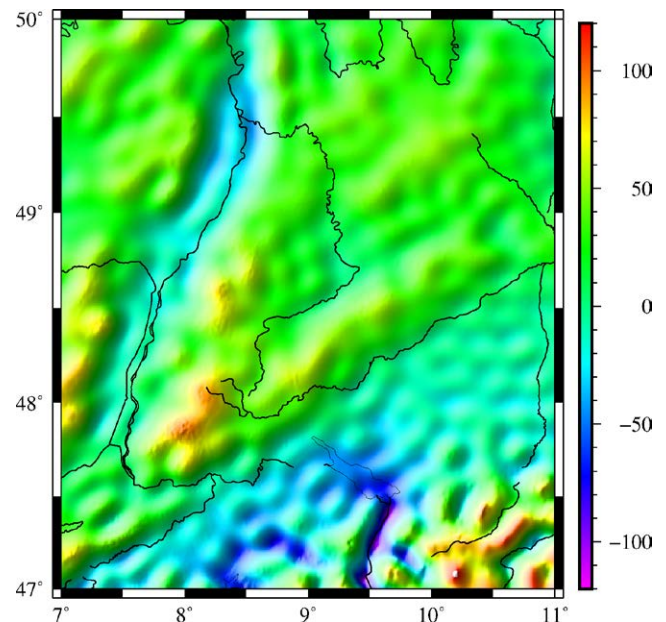


Abb. 14: Isostatische Anomalie (mGal)

Tab. 4: Statistische Kenngrößen der Schwereanomalien in Baden-Württemberg

Anomalie (mGal)	Min	Max	Mittel	RMS	Std
Freiluft	-133,416	139,735	7,213	30,236	29,363
Faye	-127,972	195,598	8,557	30,678	29,460
Bouguer (planar)	-192,143	26,367	-40,852	53,973	35,274
Bouguer (sphärisch)	-472,001	12,022	-90,261	106,183	55,925
Bouguer (geoidal)	-231,483	26,378	-41,321	54,462	35,478
Bouguer (topographisch)	-235,210	25,619	-42,476	55,527	35,763
Isostatisch	-103,506	65,009	15,900	23,945	17,904
Molodenskii	-133,463	139,068	7,166	30,217	29,354
GPM TIMr5 $N = 280$	-42,520	72,579	14,642	25,164	20,466
GPM TIMr5 + EGM2008, $N = 2190$	-105,235	121,899	11,146	30,548	28,442

Abb. 15: Schwereanomalien, TIMr5, $N = 280$ (mGal)Abb. 16: Schwereanomalien, TIMr5 + EGM2008, $N = 2190$ (mGal)

werden die Schwereanomalien bis Grad und Ordnung $N = 2190$ synthetisiert und in Abb. 16 abgebildet. Bei diesen Anomalien handelt es sich um Schwereanomalien in der Theorie nach Molodenskii, die theoretisch wiederum sehr gut mit den in Abb. 11 dargestellten Freiluftanomalien übereinstimmen. Allerdings wird die angesprochene unterschiedliche räumliche (spektrale) Auflösung deutlich. In Regionen, in denen keine terrestrischen Messungen vorhanden oder Daten nicht verfügbar sind, stellen die kombinierten Geopotentialmodelle eine gute Approximation dar.

8 Anwendungen der Schwereanomalien

Schwereanomalien sind eine bedeutende Informationsquelle in allen Geowissenschaften für vielfältige Aufgaben. Die originären Schweremessungen variieren sehr

stark von Punkt zu Punkt, da sie von lokalen Einflüssen, wie Dichteanomalien im Untergrund und der Topographie, dominiert sind. In einigen Anwendungen mit Schwereanomalien ist eine Darstellung auf regelmäßigen Gittern erforderlich, z.B. zur numerischen diskreten Lösung des Stokes-Integrals. Das bedeutet ganz praktisch, dass eine stark variierende Funktion zu interpolieren ist. Eine zuvor durch Reduktionen wohl definierte, geglättete Schwereanomalie weist bekanntermaßen deutliche numerische Vorteile auf. Die isostatische Anomalie bildet die Randwerte zur Bestimmung des Geoids, der Höhenbezugsfläche für orthometrische Höhen. Die Schwereanomalie nach Molodenskii in der Definition von Gl. (21) kann praktisch mit der Freiluftanomalie aus Gl. (16) gleichgesetzt werden. In der praktischen Realisierung der Lösung der Randwertaufgabe nach Molodenskii zur Bestimmung des Quasigeoids, als Bezugsfläche für Normalhöhen, kommen die hier nicht weiter diskutierten

Korrekturterme G_i hinzu. Sie können als Geländereduktionen interpretiert werden und führen auf eine Anomalie, die wiederum sehr gut mit der Faye-Anomalie aus Gl. (19) übereinstimmt.

Zu den bereits genannten Anwendungsfeldern wie die Prospektion und Inversion soll hier eine konkrete Nutzung der Schwereanomalien aus dem Bereich der Physikalischen Geodäsie dargestellt werden: der Zusammenhang von Bougueranomalien und der Höhendifferenz zwischen Geoid und Quasigeoid. Siehe hierzu Heiskanen und Moritz (1967, S. 325–328).

In die Berechnung von orthometrischen Höhen H_P und Normalhöhen H_P^* geht die geopotentielle Kote C_P ein, die aus Nivellement und Schweremessungen bestimmt wird. Im Falle der orthometrischen Höhen wird sie mit \bar{g} , dem integralen Mittelwert der tatsächlichen Schwere zwischen Oberflächenpunkt und Geoid, und im Falle der Normalhöhen mit $\bar{\gamma}$, dem integralen Mittelwert der Normalschwere zwischen Ellipsoid und Telluroid, auf eine metrische Größe skaliert. Die entsprechenden Höhendefinitionen lauten:

$$H_P = \frac{C_P}{\bar{g}}, \quad H_P^* = \frac{C_P}{\bar{\gamma}}. \quad (22)$$

Das Gleichsetzen der beiden Höhen bezüglich der geopotentiellen Kote C_P führt nach Heiskanen und Moritz (1967, (8–102)) auf den strengen Zusammenhang zwischen Höhensystemdifferenz und Höhendifferenz:

$$N(\varphi, \lambda) - \zeta(\varphi, \lambda) = \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} H = H^* - H. \quad (23)$$

Es ist möglich, den integralen Mittelwert der Normalschwere $\bar{\gamma}$ exakt aus Gl. (3) zu berechnen. In der Praxis wird er unter der Annahme, dass sich die Normalschwere linear mit der Höhe ändert, durch eine Höhenkorrektur analog zu Gl. (4) approximiert und kann mit der Freiluftreduktion aus Gl. (15) verknüpft werden:

$$\bar{\gamma} = \gamma_0 + \frac{d\gamma}{dh} \cdot \frac{H^*}{2} \approx \gamma_0 - \frac{\delta g_F}{2}. \quad (24)$$

Zur Darstellung der mittleren Schwere \bar{g} müssen Hypothesen getroffen werden, die z.B. in Hofmann-Wellenhof und Moritz (2006, Kap. 3.5) diskutiert werden. Im Konzept von Stokes-Helmert wird zur Berechnung von \bar{g} die Poincaré-Prey-Reduktion verwendet:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{SH} &= g_P - 2\pi \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{H}{2} - \frac{dg}{dH} \cdot \frac{H}{2} - 2\pi \cdot G \cdot \rho \cdot \frac{H}{2} - \delta g_G \\ &\approx g_P - 2\pi \cdot G \cdot \rho \cdot H - \frac{d\gamma}{dh} \cdot \frac{H}{2} - \delta g_G \end{aligned} \quad (25)$$

und dabei der Schweregradient durch den Normalschweregradienten ersetzt. Hieraus folgt mit Gl. (23) die in Heiskanen und Moritz (1967, (8–103)) bzw. Torge und Müller (2012, (6.132)) angegebene Stokes-Helmert-Näherung:

$$N(\varphi, \lambda) - \zeta(\varphi, \lambda) = \Delta g_B \frac{H}{\bar{\gamma}}. \quad (26)$$

Dieser Ausdruck wird in Flury und Rummel (2009) mit einer verfeinerten Modellierung des Schweregradienten

$$\bar{g}_{FR} = g_P - 2\pi \cdot G \cdot \rho \cdot H - \frac{d\gamma}{dh} \cdot \frac{H}{2} - \delta g_G + \left(\delta v_P^{topo} - \delta v_{P_0}^{topo} \right) \frac{1}{H} \quad (27)$$

durch die zusätzliche Berücksichtigung des Einflusses der topographischen Massen δv^{topo} verbessert.

Damit resultiert die Gleichung für die Separation zwischen den beiden Höhenbezugsflächen, die auch für Anwendungen im Hochgebirge cm-Genauigkeit ermöglicht (Flury und Rummel 2009):

$$N(\varphi, \lambda) - \zeta(\varphi, \lambda) = \Delta g_B \frac{H}{\bar{\gamma}} + \left(\delta v_P^{topo} - \delta v_{P_0}^{topo} \right) \frac{1}{H}. \quad (28)$$

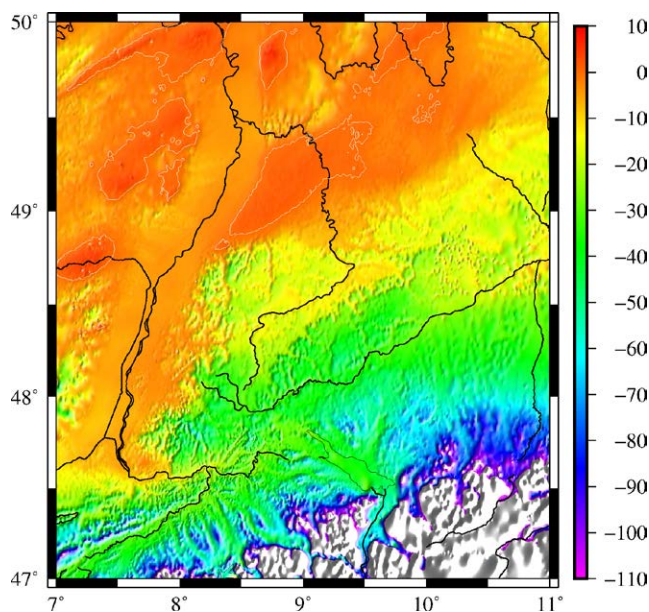
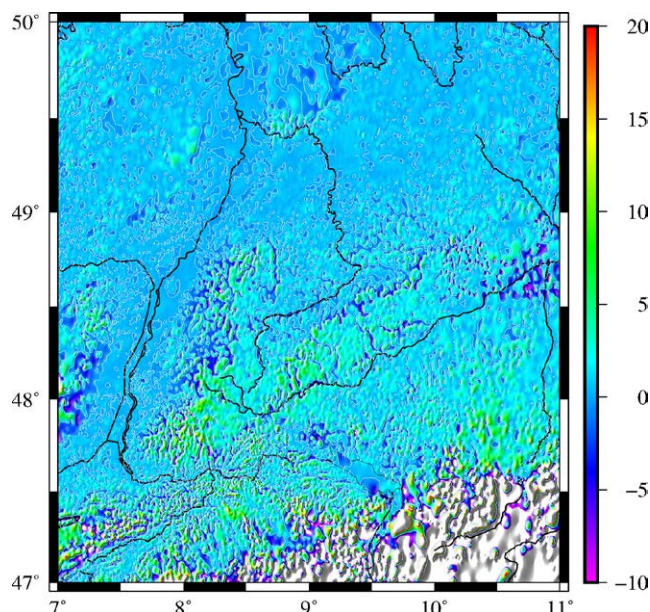
Der zweite Term enthält die Potentialwirkung der topographischen Massen, die im Punkt P an der Erdoberfläche und im Punkt P_0 am Geoid auszuwerten sind. Eine eingehende Diskussion der Auswirkung dieses Zusatzterms im Hochgebirge ist in Flury und Rummel (2009) für die Testgebiete Großglockner und Zugspitze dargelegt. Für die Zugspitze ($\varphi = 47,4212^\circ$, $\lambda = 10,9863^\circ$) wird ohne Verwendung des zweiten Terms (Potentialwirkung) eine Höhendifferenz von 32 cm angegeben. Dieser Wert wird in der vorliegenden Arbeit mit ca. 35 cm bestätigt. Unter Berücksichtigung des potentialabhängigen Korrekturterms werden in Flury und Rummel (2009) für die Zugspitze ca. 24 cm berechnet. Diese extremen Verhältnisse sind in den Mittelgebirgslagen von Baden-Württemberg nicht vorhanden.

Aus den in Abb. 13 dargestellten aktuellen Bougueranomalien kann die Differenz $N - \zeta$ zwischen Geoidundulation und Höhenanomalie berechnet werden. In Baden-Württemberg liegt die in Abb. 17 dargestellte Höhendifferenz zwischen Geoid und Quasigeoid zwischen –70 mm und +6 mm. Sie erreicht in den alpinen Gebieten bis zu –449 mm. Hier muss von einer Überschätzung der Höhendifferenz ausgegangen werden, wie das Beispiel Zugspitze zeigt.

Zum qualitativen Vergleich wurden aus dem Europäischen Gravimetrischen (Quasi)Geoid 1997 EGG97 (Denker und Torge 1998) die Geoidundulationen und Höhenanomalien und damit ihre Differenz in den 59660 Schweremesspunkten berechnet und mit der aktuellen Lösung, die aus der Transformation der Bougueranomalien nach Gl. (26) hervorgeht, verglichen. Die Differenzen sind in Abb. 18 dargestellt und liegen für Baden-Württemberg zwischen –10 mm und +20 mm. Es wird deutlich, dass die aktuell berechneten Bougueranomalien lokal eine höhere Auflösung aufweisen, was der verbesserten Datenbasis zugeschrieben werden kann. Die zugehörigen statistischen Kenngrößen sind in Tab. 5 aufgeführt.

Tab. 5: Statistische Kenngrößen der Differenz zwischen Geoidundulation und Höhenanomalie

(mm)	Min	Max	Mittel	RMS	Std
Geoidundulation N (EGG97)	46073	51461	48160	48167	821
Höhenanomalie ζ (EGG97)	46108	51719	48184	48191	815
$N - \zeta$ (EGG97)	-435	7	-24	42	34
$N - \zeta$ aus Bougueranomalien	-449	6	-24	41	33
Residuen (EGG97 – Bouguer)	-76	96	0	5	5

Abb. 17: $N - \zeta$ aus Gl. (26) (mm)Abb. 18: $N - \zeta$ Unterschied zu EGG97 (mm)

9 Zusammenfassung und Ausblick

Aus hochaufgelösten Schweredaten und digitalen Geländemodellen wurden für das Gebiet von Baden-Württemberg unterschiedliche Schwereanomalien berechnet. Die einzelnen Komponenten, die zu den Anomalien beitragen, wurden dafür im Gebiet $47^\circ \leq \varphi \leq 50^\circ$, $7^\circ \leq \lambda \leq 11^\circ$ generiert. Diese sind im Einzelnen: Normalschwere, Freiluftreduktion, planare, sphärische sowie geoidale Bouguerreduktion, Geländereduktion, topographische und isostatische Reduktion. Eine stufenweise Berücksichtigung der Messpunkthöhe, der topographischen und isostatischen Massen führt zu den Freiluft-, Faye-, Bouguer- und isostatischen Anomalien. Weisen die Freiluftanomalien noch deutlich den Masseneinfluss der Topographie auf, sind die Bougueranomalien durch Reduktion der topographischen Massen deutlich glatter. Sie eignen sich für Interpolationszwecke. Als konkretes Anwendungsbeispiel wurde aus den Bougueranomalien der Unterschied zwischen der Geoidundulation und der Höhenanomalie berechnet. Die Höhendifferenz zwischen Geoid und Quasigeoid liegt in Baden-Württemberg zwischen -70 mm und $+6$ mm. Durch Reduktion der isostatischen Massen wird rechnerisch eine Erdkruste konstanter Mächtigkeit hergestellt. Die verbleibenden isostatischen Anoma-

lien weisen Effekte von Dichtestörungen auf. Sie werden als Randwerte für die Geoidbestimmung verwendet.

Über einen Inversionsansatz mittels Diskretisierung durch Tesseroide können diese Dichtestörungen berechnet und im Rahmen von Prospektionszwecken interpretiert werden. Da die genannten Anomalien sämtlich von Annahmen über den vertikalen Schweregradienten (Freiluftreduktion) und Hypothesen über die Gesteinsdichte abhängig sind, könnte die Dichteverteilung iterativ verbessert werden.

In Ergänzung zu den auf terrestrischen Messungen basierenden Anomalien wurden auch Schwereanomalien aus Geopotentialmodellen synthetisiert. Sie sind global berechenbar, jedoch in ihrer spektralen Auflösung limitiert.

Dank

Wir danken den genannten Institutionen für die Bereitstellung der Punktschweredaten und digitalen Geländemodelle. Dem Steinbuch Centre for Computing (SCC) des KIT sei für die Bereitstellung von Computerressourcen gedankt. Herrn Prof. J. Müller und einem weiteren Gutachter danken wir für die sorgfältige Durchsicht des Manuskripts und die hilfreichen Anregungen.

Literatur

- Abd-Elmotaal, H. (1991): Gravity Anomalies Based on the Vening Meinesz Isostatic Model and their Statistical Behaviour. Mitteilungen des Geodätischen Instituts der Technischen Universität Graz, Folge 72.
- Brockmann, J.M., Zehentner, N., Höck, E., Pail, R., Loth, I., Mayer-Gürr, T., Schuh, W.-D. (2014): EGM_TIM_RL05: An independent geoid with centimeter accuracy purely based on the GOCE mission. *Geophysical Research Letters*, 41(22), 8089–8099. DOI: 10.1002/2014GL061904.
- Bruinsma, S.L., Förste, C., Abrikosov, O., Lemoine, J.-M., Marty, J.-C., Mulet, S., Rio, M.-H., Bonvalot, S. (2014): ESA's satellite-only gravity field model via the direct approach based on all GOCE data. *Geophysical Research Letters*, 41(21), 7508–7514. DOI: 10.1002/2014GL062045.
- Clauser, C. (2016): Einführung in die Geophysik. 2. Auflage, Springer Spektrum.
- Deng, X.-L., Shen, W.-B. (2018): Evaluation of Optimal Formulas for Gravitational Tensors up to Gravitational Curvatures of a Tesseroid. *Surveys in Geophysics*, 39(3), 365–399. DOI: 10.1007/s10712-018-9460-8.
- Denker, H., Torge, W. (1998): The European Gravimetric Quasigeoid EGG97 – An IAG Supported Continental Enterprise –. In: Forsberg, R., Feissel, M., Dietrich, R. (Eds.): *Geodesy on the Move, Gravity, Geoid, Geodynamics, and Antarctica*. IAG Scientific Assembly, Rio de Janeiro, Sept. 3–9, 1997, IAG Symposia, 119:249–254, Springer-Verlag. DOI: 10.1007/978-3-642-72245-5_36.
- Farr, T.G., Rosen, P.A., Caro, E., Crippen, R., Duren, R., Hensley, S., Kobrick, M., Paller, M., Rodriguez, E., Roth, L., Seal, D., Shaffer, S., Shimada, J., Umland, J., Werner, M., Oskin, M., Burbank, D., Alsdorf, D. (2007): The Shuttle Radar Topography Mission. *Reviews of Geophysics*, vol. 45, RG2004. DOI: 10.1029/2005RG000183.
- Fecher, T., Pail, R., Gruber, T., GOCO Consortium (2017): GOCO05c: A New Combined Gravity Field Model Based on Full Normal Equations and Regionally Varying Weighting. *Surveys in Geophysics*, 38(3), 571–590. DOI: 10.1007/s10712-016-9406-y.
- Flury, J. (2002): Schwerefeldfunktionale im Gebirge. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 557.
- Flury, J., Rummel, R. (2009): On the geoid – quasigeoid separation in mountain areas. *Journal of Geodesy*, 83(9), 829–847. DOI: 10.1007/s00190-009-0302-9.
- Gerlach, C. (2003): Zur Höhensystemumstellung und Geoidberechnung in Bayern. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 571.
- Grombein, T. (2017): Gravity forward modeling with a tesseroid-based Rock-Water-Ice approach – Theory and applications in the context of the GOCE mission and height system unification. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 798.
- Grombein, T., Seitz, K., Heck, B. (2013): Optimized formulas for the gravitational field of a tesseroid. *Journal of Geodesy* 87(7), 645–660. DOI: 10.1007/s00190-013-0636-1.
- Grüninger, W. (1990): Zur topographisch-isostatischen Reduktion der Schwere. PhD thesis, Universität Karlsruhe.
- Gültlinger, M., Schleyer, A., Spohrer, M. (2001): Flächendeckendes, hochgenaues DGM von Baden-Württemberg. In: Mitteilungen des Vereins für Vermessungswesen BW, 48(2), 63–77.
- Hackney, R.I., Featherstone, W.E. (2003): Geodetic versus geophysical perspective of the 'gravity anomaly'. *Geophysical Journal International*, 154(1), 35–43. DOI: 10.1046/j.1365-246X.2003.01941.x.
- Hartmann, T., Wenzel, H.-G. (1995): The HW95 tidal potential catalogue. *Geophysical Research Letters*, 22(24), 3553–3556. DOI: 10.1029/95GL03324.
- Hayford, J.F., Bowie, W. (1912): The effect of topography and isostatic compensation upon the intensity of gravity. *US Coast and Geodetic Survey, Spec. Publ. No. 10*.
- Heck, B. (1989): A Contribution to the Scalar Free Boundary Value Problem of Physical Geodesy. *manuscripta geodaetica*, 14, 87–99.
- Heck, B. (2003a): On Helmert's Methods of Condensation. *Journal of Geodesy*, 77(3), 155–170. DOI: 10.1007/s00190-003-0318-5.
- Heck, B. (2003b): Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung. *Klassische und moderne Methoden*. 3. Auflage. Wichmann, Heidelberg.
- Heck, B., Seitz, K. (2007): A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. *Journal of Geodesy* 81(2), 121–136. DOI: 10.1007/s00190-006-0094-0.
- Heiskanen, W. (1924): Untersuchungen über Schwerkraft und Isostasie. Helsinki, Publ. Finn. Geod. Inst. No. 4.
- Heiskanen, W. (1928): Investigations regarding gravity and isostasy. *Geol. Survey of India*.
- Heiskanen, W.A., Moritz, H. (1967): *Physical Geodesy*. WH Freeman, San Francisco.
- Heiskanen, W.A., Vening Meinesz, F.A. (1958): *The Earth and its Gravity Field*. McGraw-Hill, New York.
- Hofmann-Wellenhof, B., Moritz, H. (2006): *Physical Geodesy*. Second edition. Springer Wien New York.
- Jarvis, A., Reuter, H.I., Nelson, A., Guevara, E. (2008): Hole-filled seamless SRTM data V4. International Centre for Tropical Agriculture. <http://srtm.csi.cgiar.org>.
- Kuhn, M. (2000): Geoidbestimmung unter Verwendung verschiedener Dichtehypothesen. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 520.
- Kvas, A., Mayer-Gürr, T., Brockmann, J.M., Schubert, T., Schuh, W.-D., Pail, R., Gruber, T., Jäggi, A., Meyer, U., Krauß, S. (2019): The combined satellite gravity field model GOCO06s. *European Geosciences Union General Assembly*. 07.–12.04.2019, Wien.
- LaFehr, T.R. (1991a): Standardization in gravity reduction. *Geophysics*, 56(8), 1170–1178. DOI: 10.1190/1.1443137.
- LaFehr, T.R. (1991b): An exact solution for the gravity curvature (Bullard B) corrections. *Geophysics*, 56(8), 1179–1184. DOI: 10.1190/1.1443138.
- Lin, M., Denker, H. (2019): On the computation of gravitational effects for tesseroids with constant and linearly varying density. *Journal of Geodesy*, 93, 723–747. DOI: 10.1007/s00190-018-1193-4.
- Mader, K. (1951): Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Sonderheft 11.
- Marotta, A.M., Barzaghi, R. (2017): A new methodology to compute the gravitational contribution of a spherical tesseroid based on the analytical solution of a sector of a spherical zonal band. *Journal of Geodesy*, 91(10), 1207–1224. DOI: 10.1007/s00190-017-1018-x.
- Marotta, A.M., Seitz, K., Barzaghi, R., Grombein, T., Heck, B. (2019): Comparison of two different approaches for computing the gravitational effect of a tesseroid. *Studia Geophysica et Geodaetica* 63, 1–24. DOI: 10.1007/s11200-018-0454-2, (online first).
- Molodenskii, M.S., Eremeev, V.F., Yurkina, M.I. (1962): *Methods for Study of the External Gravitational Field and Figure of the Earth*. Translation from Russian (1960), Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations.
- Moritz, H. (1968): On the use of the terrain correction in solving Molodensky's problem. Rep 108, Department of Geodetic Science, The Ohio State University, Columbus OH.
- Moritz, H. (1984): *Geodetic Reference System 1980*. Bulletin Géodésique, 58, 388–398, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Nagy, D. (1966): The gravitational attraction of a right rectangular prism. *Geophysics*, 31, 362–371.
- Nagy, D., Papp, G., Benedek, J. (2000): The gravitational potential and its derivatives for the prism. *Journal of Geodesy*, 74, 552–560. DOI: 10.1007/s001900000116.
- Nagy, D., Papp, G., Benedek, J. (2002): Corrections to "The gravitational potential and its derivatives for the prism". *Journal of Geodesy*, 76, 475. DOI: 10.1007/s00190-002-0264-7.
- Pail, R., Fecher, T., Barnes, D., Factor, J.F., Holmes, S.A., Gruber, T., Zingerle, P. (2018): Short note: the experimental geopotential model XGM2016. *Journal of Geodesy*, 92(4), 443–451. DOI: 10.1007/s00190-017-1070-6.
- Pavlis, N.K., Holmes, S.A., Kenyon, S.C., Factor, J.K. (2012): The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008. *Journal of Geophysical Research*, 117(B04406). DOI: 10.1029/2011JB008916.
- Pavlis, N.K., Holmes, S.A., Kenyon, S.C., Factor, J.K. (2013): Correction to "The development and evaluation of the Earth gravitational model 2008 (EGM2008)". *Journal of Geophysical Research*, 118(5), 2633. DOI: 10.1002/jgrb.50167.
- Schleyer, A. (2001): *Das Laserscan-DGM von Baden-Württemberg*. PhotogrammetrieWeek 01. Wichmann Verlag Heidelberg, 217–225.
- Seitz, K. (1997): Ellipsoidische und topographische Effekte im geodätischen Randwertproblem. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft Nr. 483.

- Seitz, K., Heck, B. (2001): Tesseroids for the calculation of topographic reductions. Abstracts "Vistas for Geodesy in the New Millenium", IAG 2001 Scientific Assembly 2–7 Sept 2001, Budapest, Hungary: 106.
- Shako, R., Förste, C., Abrikosov, O., Bruinsma, S., Marty, J., Lemoine, J., Flechtner, F., Neumayer, H., Dahle, C. (2014): EIGEN-6C: A High-Resolution Global Gravity Combination Model Including GOCE Data; Springer, Berlin-Heidelberg, 155–161. DOI: 10.1007/978-3-642-32135-1_20.
- Smith, D.A., Robertson, D.S., Milbert, D.G. (2001): Gravitational attraction of local crustal masses in spherical coordinates. *Journal of Geodesy*, 74(11), 783–795. DOI: 10.1007/s001900000142.
- Somigliana, C. (1929): Teoria del campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione. *Mem. Soc. astron. ital.*, 4.
- Somigliana, C. (1930): Sul campo gravitazionale esterno del geoide ellissoidico. *Atti Accad. Lincei*, VI, 11, 237–243.
- Stokes, G.G. (1849): On the Variation of Gravity at the Surface of the Earth. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. VIII, part V, 672–694.
- Tapley, B.D., Bettadpur, S., Watkins, M., Reigber, C. (2004): The gravity recovery and climate experiment: Mission overview and early results. *Geophysical Research Letters*, 31(L09607), 1–4. DOI: 10.1029/2004GL019920.
- Torge, W. (1989): *Gravimetry*. Walter-de-Gruyter-Verlag, Berlin, New York.
- Torge, W. (2003): *Geodäsie*, 2. Auflage, Walter-de-Gruyter-Verlag, Berlin, New York.
- Torge, W., Müller, J. (2012): *Geodesy*. 4th edition, de Gruyter, Berlin.
- Vaniček, P., Novák, P., Martinec, Z. (2001): Geoid, topography, and the Bouguer plate or shell. *Journal of Geodesy*, 75(4), 210–215. DOI: 10.1007/s001900100165.
- Vaniček, P., Tenzer, R., Sjöberg, L.E., Martinec, Z., Featherstone, W.E. (2004): New views of the spherical Bouguer gravity anomaly. *Geophysical Journal International*, 159(2), 460–472. DOI: 10.1111/j.1365-246X.2004.02435.x.
- Wenzel, H.-G. (1985): Hochauflösende Kugelfunktionsmodelle für das Gravitationspotential der Erde. *Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover*, Nr. 137.
- Wenzel, H.-G. (1996): The nanogal software: Earth tide data processing package ETERNA 3.30. *Bulletin d'Informations Mareés Terrestres*, 124, 9425–9439, Bruxelles.
- Wild-Pfeiffer, F. (2008): A comparison of different mass elements for use in gravity gradiometry. *Journal of Geodesy*, 82(10), 637–653. DOI: 10.1007/s00190-008-0219-8.

Kontakt

Dr.-Ing. Kurt Seitz, kurt.seitz@kit.edu
Dr.-Ing. Thomas Grombein, thomas.grombein@kit.edu
Prof. Dr.-Ing. Hansjörg Kutterer, hansjoerg.kutterer@kit.edu
Geodätisches Institut, Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Englerstraße 7, 76128 Karlsruhe

Dieser Beitrag ist auch digital verfügbar unter www.geodaesie.info.