

# Eine Lösung für den räumlichen Rückwärtsschnitt in der Vermessungstechnik

Ralf Ulrich Donner

## Zusammenfassung

Für die Bestimmung der Lage allein aus Richtungsmessungen zu Anschlusspunkten (ebener Rückwärtsschnitt) liegen zahlreiche Lösungen vor. Eine praktische, d.h. auch numerisch stabile Bestimmung der dreidimensionalen Position aus Ablesungen des Horizontalkreises und des Vertikalkreises gestaltet sich bis heute schwieriger. Dafür wird hier eine Lösung unter Einbeziehung einer Solve-Routine geboten. Sie ist unter Verwendung der in der geodätischen Vermessungspraxis in aller Regel gegebenen Übereinstimmung der Richtung der Stehachse mit der Z-Richtung des übergeordneten Koordinatensystems eindeutig. Fehler an Messungen oder Koordinatenanschlüssen können bei mehrdeutigen Lösungen jedoch zu Fehlentscheidungen bei der Auswahl der richtigen Lösung führen.

Die Eignung der Lösungsidee wird an den für diese Aufgabe wiederholt publizierten Daten des Testnetzes »Stuttgart Mitte« sowie an simulierten und realen Daten des Nahbereiches gezeigt. Die Ansätze für die vermittelnde (Gauß-Markov-Modell) und die allgemeine Ausgleichung (Gauß-Helmert-Modell) werden angegeben und angewendet. Der Lösungsansatz für den räumlichen Rückwärtsschnitt ist auch für die Richtungsbeobachtung mit photogrammetrischen Messkameras geeignet. Eine ausführliche photogrammetrische Darstellung wird andernorts gegeben.

## Summary

*Numerous solutions are available for solving the two-dimensional resection problem from measurements solely consisting of horizontal directions to target points with known coordinates (plane reverse section). A practical and numerically stable determination of the three-dimensional resection problem from horizontal and vertical directions is still difficult today. For this, a simple solution is offered here. The solution is unique using common assumptions. However, under certain circumstances (»dangerous locations«), errors in measurements and coordinates can lead to the wrong decision for ambiguous solutions.*

*The usability of the solution idea is examined and verified by using the data of the test network »Stuttgart Central« as well as simulated and real data of the near range. Examples for Gauss-Markov adjustment and for Gauss-Helmert adjustment are given and applied. The three-dimensional resection approach is also useful for directional observation with photogrammetric cameras. A detailed photogrammetric publication is in preparation.*

**Schlüsselwörter:** Räumlicher Rückwärtsschnitt, Bestimmung der dreidimensionalen Position, Bestimmung der Orientierung im Raum

## 1 Ausgangssituation und Zielsetzung

### 1.1 Einordnung des Rückwärtsschnittes in die räumlichen Positionierungsverfahren

Soweit möglich, wird die eigene 3D-Position heute durch das Verfahren »freie Stationierung« bestimmt. Es beruht auf der Messung der horizontalen und vertikalen Richtungen sowie den Distanzen zu Zielen mit bekannten Koordinaten der Lage und der Höhe (im Folgenden »Anschlusspunkte«, AP). Durch Messung der Richtungen und der Distanzen liegen die Anschlusspunkte im lokalen, dreidimensionalen Koordinatensystem des Tachymeters (im Folgenden »Standpunktkoordinatensystem«, SKS) vor. Die Transformation des Standpunktes (SP) aus dem Standpunktkoordinatensystem in das übergeordnete Koordinatensystem (im Folgenden »Objektkoordinatensystem«, OKS) erfolgt durch drei Translationen, wenn keine Maßstabsänderung vorgesehen werden soll. Für die räumliche Positionierung sind entsprechend drei Unbekannte zu bestimmen. Obwohl die mathematischen Formeln der freien 3D-Stationierung nicht-lineare Gestalt haben, werden zusätzliche Näherungswerte nicht benötigt.

Werden nur Richtungen, keine Distanzen, gemessen, handelt es sich um einen Rückwärtsschnitt. Die räumliche Rückwärtspositionierung allein aus Richtungsbeobachtungen ist im Vergleich zur Trisphäration weniger anfällig für Refraktionseinflüsse (Awange und Paláncz 2016, S. 333), Maßstabsfaktoren sind in der Regel nicht notwendig.

Für die geometrische Behandlung des räumlichen Rückwärtsschnittes ist es ohne Belang, ob die Richtungen mit einem Theodolit oder mit einer photogrammetrischen Messkamera beobachtet werden. Dies ist für die Darstellung des Wissensstandes von Bedeutung. Da in der Photogrammetrie jedoch spezialisierte Begriffe üblich sind und Eigenschaften der projektiven Abbildung für die Lösung in Betracht gezogen werden müssen, erfolgt die ausführliche Beschreibung der Lösung der photogrammetrischen Variante des räumlichen Rückwärtsschnittes in einer photogrammetrischen Publikation.

### 1.2 Stand der wissenschaftlichen Diskussion des räumlichen Rückwärtsschnittes

**Geodätische Vermessungstechnik:** Eine Zusammenstellung der bislang bekannten Lösungen zum räumlichen Rückwärtsschnitt (RRWS) geben Awange und

Paláncz (2016, S. 335 ff.). Ihre Ausführungen resultieren in ausgefeilten algebraischen Verfahren zur Lösung der ursprünglich von Grunert (1841) publizierten Polynomgleichungen *vierten* Grades zur Berechnung des räumlichen Rückwärtsschnittes. Die grundlegenden Grunert'schen Distanzgleichungen stellen die Entferungen zwischen den Anschlusspunkten, die räumlichen Winkel und die Entferungen des Standpunktes zu den Anschlusspunkten in einen nichtlinearen trigonometrischen Zusammenhang. Die eigene Position ergibt sich letztlich aus der Trisphäration der in Zwischenschritten berechneten Distanzen zu den Anschlusspunkten.

Für die Auflösung der Polynomgleichungen vierten Grades liegen verschiedene Ansätze vor, jüngere von Grafarend, Lohse und Schaffrin (1989) oder Grafarend und Shan (1997). Letztere mit mindestens vier Anschlusspunkten in einem System Möbius'scher baryzentrischer Koordinaten. Die potenzielle Verwendung dieses Lösungsweges in einem Ausgleichungsverfahren wurde in (Awange, Grafarend und Fukuda 2003) gezeigt. Eine umfassendere Übersicht gibt (Awange und Paláncz 2016, S. 343 ff.). Insgesamt sind die vorliegenden Lösungsansätze wegen der hohen Ordnung der Gleichungen algorithmisch anspruchsvoll und vieldeutig.

**Photogrammetrie:** Den aktuellen Stand der wissenschaftlichen Diskussion übernehmen wir aus (Luhmann 2018, S. 281 ff.). Für das Messen in Bildern sind neben den drei Koordinaten des Projektionszentrums auch die drei Rotationen der Messkamera gegenüber dem Objektkoordinatensystem notwendig. Diese insgesamt sechs Parameter werden im Rahmen der photogrammetrischen Bündelausgleichung bestimmt. Wegen der Nichtlinearität der zugrunde liegenden Kollinearitätsgleichungen werden Näherungswerte der sechs Unbekannten benötigt. Die Lösung des zuvor zu linearisierenden Gleichungssystems erfolgt iterativ. Für die Bestimmung der sechs Unbekannten des »Rückwärtsschnittes mit minimaler Objektinformation« (ebenda) sind drei Paare gemessener Bild- und bekannter Objektkoordinaten (Anschlusspunkte) erforderlich. Luhmann (2018, S. 281) gibt als beispielhaftes Berechnungsschema ein Verfahren ähnlich dem Vorschlag von Rohrberg (2009) wieder. In Rohrberg (2009) wird der Beginn der Theoriebildung für die Lösung des räumlichen Rückwärtsschnittes mit drei Passpunkten ebenfalls auf Grunert (1841) und die von ihm angegebenen Polynomgleichungen vierten Grades zurückgeführt. Rohrberg entwickelt 2009 darauf aufbauend eine programmierfähige Lösung. Sie gestattet mit iterativen Suchstrategien in »relativ komplexen geometrischen Figuren« (Luhmann 2018, S. 282) die Bestimmung der Rotationen und Translationen des Bildkoordinatensystems gegenüber dem Objektkoordinatensystem, sofern die Lösung eindeutig ist.

In der Literatur wird auf Mehrdeutigkeiten insoweit eingegangen, dass sie ohne zusätzliche Information nicht aufgelöst werden könnten. In Rohrberg (2009) wird darüber hinaus festgestellt, dass räumliche Winkel zwis-

schen den Richtungen zu den Anschlusspunkten größer  $100^{\text{gon}}$  eindeutige Lösungen ermöglichen.

Falls mehr als fünf räumlich verteilte Anschlusspunkte zur Verfügung stehen, wird eine lineare Lösung des räumlichen Rückwärtsschnittes möglich, die sogenannte »Direkt-Lineare Transformation«. Deren Lösung ist überparametrisiert, was einer Optimierung entsprechend den jeweiligen Genauigkeiten im Wege steht. Letztendlich genügen photogrammetrische Lösungen des räumlichen Rückwärtsschnittes der Beschaffung genügend genauer *Näherungswerte* für die strenge Bündelausgleichung auf der Grundlage der Kollinearitätsgleichungen (Luhmann 2018, ebenda), sofern sie eindeutig sind oder eine Mittelwertbildung sinnvoll ist.

### 1.3 Zielsetzung

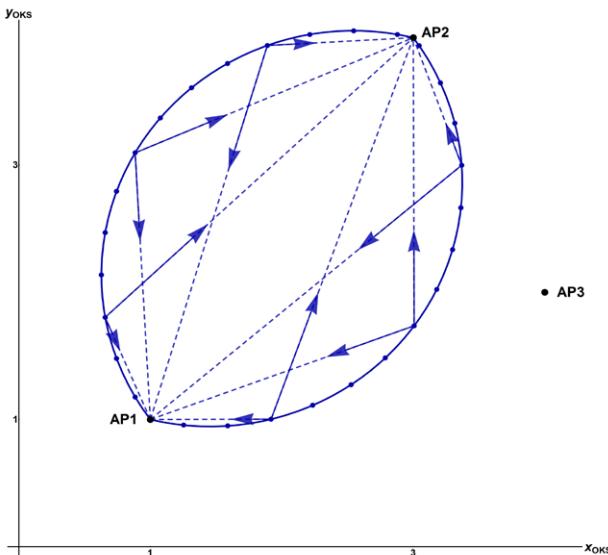
Es wird ein Verfahren gesucht, mit dessen Hilfe aus Richtungsmessungen zu drei räumlich verteilten Anschlusspunkten die eigene 3D-Position zuverlässig und mit hoher Genauigkeit in einer geschlossenen Form bestimmt werden kann, soweit es die geometrische Konstellation zulässt. Die Eignung des hier zu entwickelnden Verfahrens sowohl im Nahbereich als auch in der Landesvermessung soll nachgewiesen werden. Genauigkeitseinschränkende und mehrdeutige geometrische Konstellationen sollen identifiziert werden und Möglichkeiten ihrer Auflösung aufgezeigt werden.

## 2 Räumlicher Rückwärtsschnitt

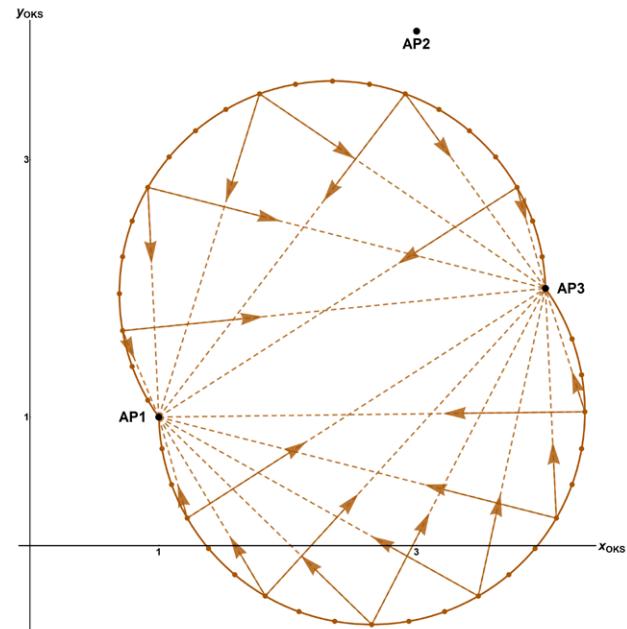
### 2.1 Ebener Rückwärtsschnitt

Bei einem ebenen Rückwärtsschnitt werden aus den horizontalen Richtungen zu mindestens drei Anschlusspunkten die Lagekoordinaten des eigenen Standpunktes berechnet. Für die Berechnung der beiden Unbekannten aus zwei Winkeln oder zwei orientierten Richtungen können die Umkreise der Dreiecke genutzt werden, die durch den Neupunkt und je zwei Anschlusspunkte entstehen. Die gemessenen Winkel zwischen den Anschlussrichtungen bestimmen die Radien der Umkreise.

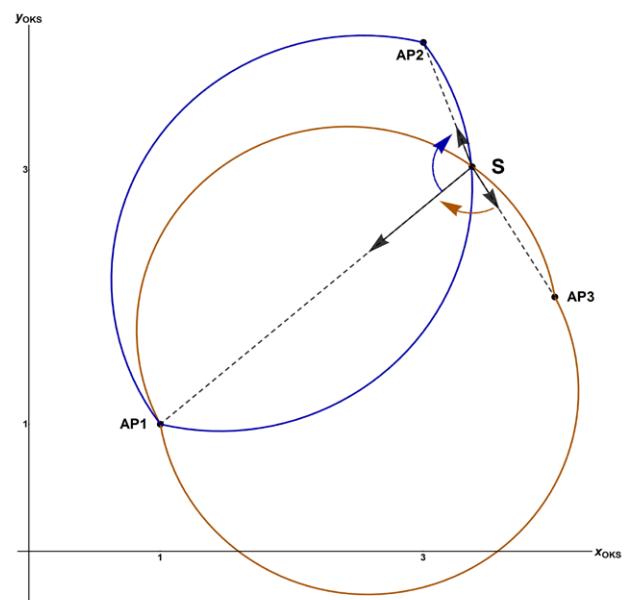
Wenn der Winkel zwischen zwei Anschlussrichtungen ein rechter Winkel wäre, wäre dieser Ort, von dem aus er hätte gemessen werden können, ein Halbkreisbogen und sein Spiegel an der Verbindungsgeraden zwischen den beiden Anschlusspunkten. Ist der beobachtete Winkel kleiner als  $90^{\circ}$ , ist der Ort, von dem aus der Winkel hätte beobachtet werden können, ein Kreisbogen länger  $\pi r$ . Ist der Winkel größer als  $90^{\circ}$ , wird der potenzielle Standpunkt durch einen Bogenabschnitt kleiner einem Halbkreisbogen beschrieben (siehe Abb. 1 bis 3). Solange nicht alle Anschlusspunkte und der Neupunkt auf einem gemeinsamen Kreis liegen, ist die Lösung eindeutig.



→ Abb. 1: Ebener Rückwärtsschnitt: Die Position des eigenen Standpunktes ergibt sich gegenüber jedem Paar von Anschlussrichtungen als Kreisbogenausschnitt und dessen Spiegel. Einige potenzielle Standpunkte und ihre Zielrichtungen sind eingetragen. Zwischen  $AP_1$  und  $AP_2$  wurde ein Winkel größer als  $100^{\text{gon}}$  (im Bild  $122^{\text{gon}}$ ) gemessen.



→ Abb. 2: Ebener Rückwärtsschnitt: Eine solche Figur entsteht bei Winkeln zwischen den Anschlussrichtungen kleiner einem rechten Winkel. Der Abbildung liegt ein Winkel von  $73^{\text{gon}}$  zugrunde.



## 2.2 Geometrie des räumlichen Rückwärtsschnittes

Der Ort, von dem aus *im Raum* ein bestimmter Winkel hätte gemessen werden können – egal, ob photogrammetrisch oder mit einem Theodoliten als horizontal und vertikal gemessenem Winkel –, ergibt sich als Rotation des Kreisbogenabschnittes des ebenen Rückwärtsschnittes (siehe Abschnitt 2.1) um den Abschnitt der Verbindungsgeraden zwischen den beiden Anschlusspunkten. Wenn die drei Winkel jeweils  $100^{\text{gon}}$  betragen würden, ließe sich der eigene Standort als Schnitt von drei Kugeln als analytische Lösung einer quadratischen Gleichung finden (Lehmann 2018). Im Allgemeinen könnte die aus einem Winkel entstehende Rotationsfigur als entarteter Rotationstorus bezeichnet werden, da der Radius des Röhrenprofils größer als der Radius der Röhrenachse

ist; ein Torus ohne Loch. Die Abb. 4 und 5 sollen die Bildung einer räumlichen Vorstellung des 3D-Lösungsraumes unterstützen.

Bei dem RRWS wird die eigene Position geometrisch durch den Schnitt von drei rotierenden Kreisbogensegmenten definiert. Ihre Formen können, wie gesagt und abgebildet, einem Football ähneln oder einer Einstülpungsfigur. Je nach geometrischer Konstellation ist der Schnittpunkt von drei solchen Rotationsfiguren, wie sie typisiert in den Abb. 4 und 5 zu sehen sind, ein- oder mehrdeutig. Bei zehntausenden Monte-Carlo-Simulationen, wie sie in Abschnitt 3.2 beschrieben werden, waren die Lösungen in 44 % der Fälle eindeutig, etwa ebenso viele waren zweideutig und je 6 % der Lösungen hatten drei bzw. vier Schnittpunkte (siehe Abb. 6).

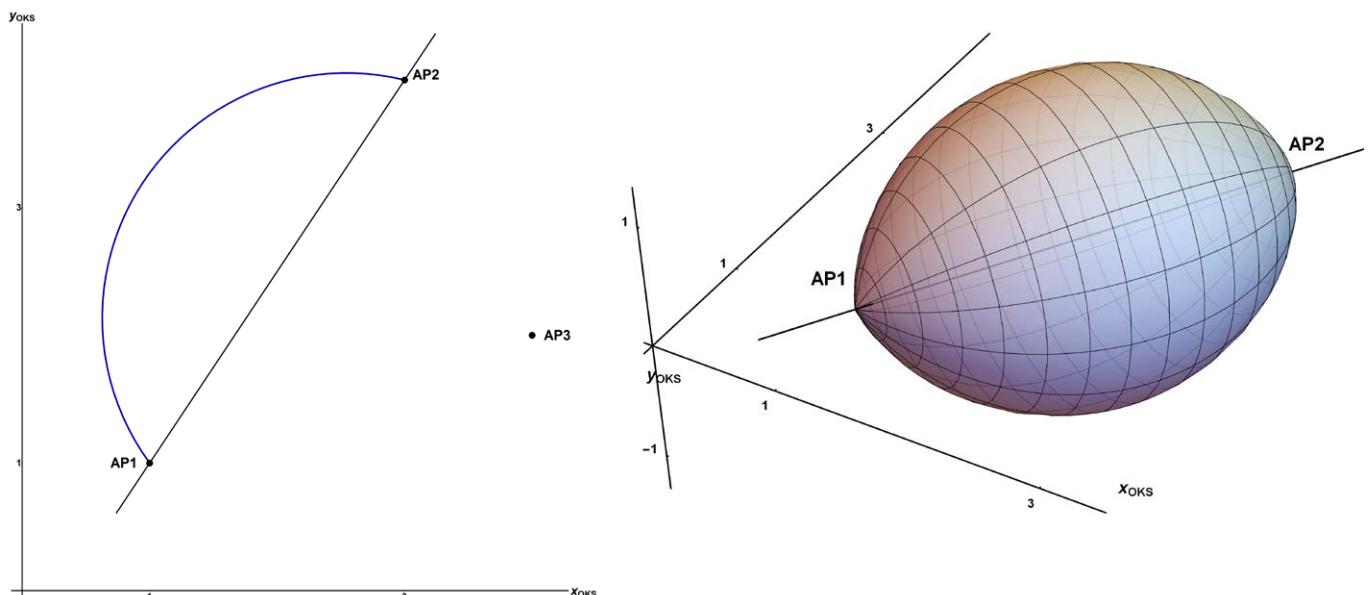


Abb. 4: Räumlicher Rückwärtsschnitt bei großem Winkel ( $> 100^{\text{gon}}$ ) zwischen zwei Anschlusspunkten: Die Figur erinnert an einen Football. Links: Kreisbogensegment; entspricht der halben Lösung des ebenen Rückwärtsschnittes, rechts: Rotationsfigur, deren Achse die Verbindungsgerade der beiden Anschlusspunkte ist.

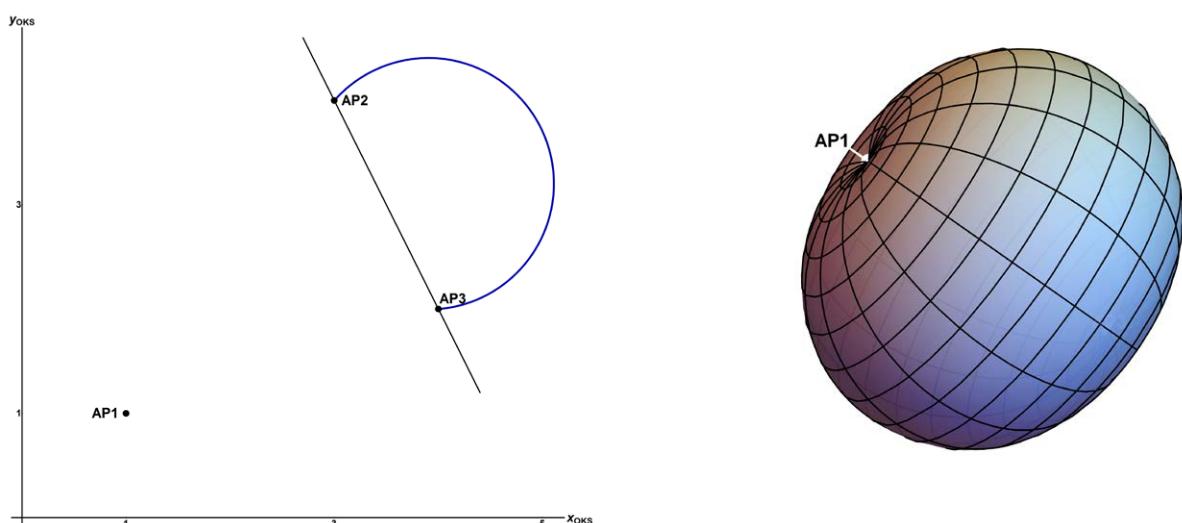


Abb. 5: Räumlicher Rückwärtsschnitt bei kleinem Winkel ( $< 100^{\text{gon}}$ ): Die Oberfläche beschreibt den Ort des Raumes, von welchem ein gegebener Winkel (in dieser Abbildung:  $73^{\text{gon}}$ ) zwischen zwei Anschlusspunkten hätte gemessen worden sein können. Sie ergibt sich als Rotationsfigur aus der Rotation eines Kreisbogensegmentes. Links: Kreisbogensegment; entspricht der halben Lösung des ebenen Rückwärtsschnittes, rechts: Rotationsfigur um die Verbindungsgerade der beiden Anschlusspunkte (Torus ohne Loch).

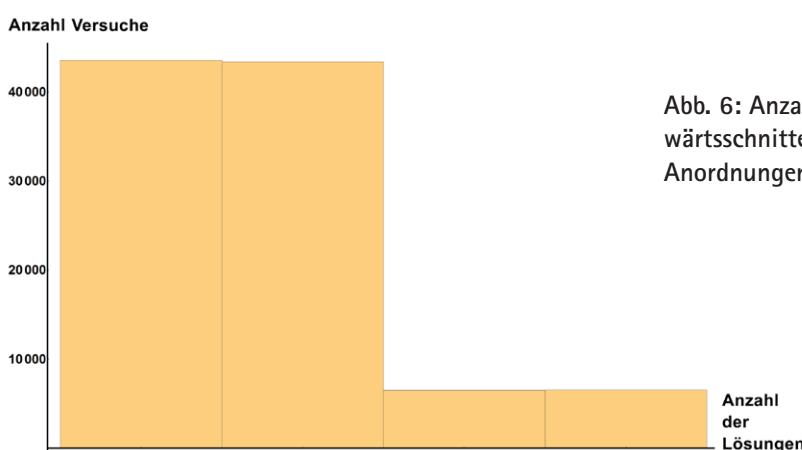


Abb. 6: Anzahl der Lösungen des räumlichen Rückwärtsschnittes bei 100.000 zufälligen geometrischen Anordnungen im Nahbereich

## 2.3 Berechnung des räumlichen Rückwärtsschnittes

### 2.3.1 Die Lösungsidee

Mit Hilfe einer Solve-Routine werden im Standpunktkoordinatensystem die Längen der Zielstrahlen zu den drei Anschlusspunkten rechnerisch so bestimmt, dass die Distanzen zwischen den Endpunkten dieser Strahlen den euklidischen Distanzen zwischen den Anschlusspunkten entsprechen.

### 2.3.2 Algorithmusbeispiel

Gegeben sind die 3D-Koordinaten von drei Anschlusspunkten ( $AP_i$  mit  $i \in \{1, 2, 3\}$ ) sowie die gemessenen Richtungen zu ihnen.

- (a) Aus den Koordinatenunterschieden der Anschlusspunkte werden die Quadrate ihrer drei wechselseitigen euklidischen Distanzen berechnet (1).

$$d_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 \quad (1)$$

mit  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

- (b) Die Richtungen (Horizontalkreisablesungen  $r_i$  und Vertikalwinkel  $\zeta_i$  oder gleichwertig: räumliche Winkel  $\psi_{ij}$ ) definieren die Einheitsvektoren  $vec_i$  im kartesischen Koordinatensystem des Standpunktes (SKS, Formel 2). Die Vektoren bilden ein Dreibein.

$$vec_i = \begin{pmatrix} vec_{i,x} \\ vec_{i,y} \\ vec_{i,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin r_i \sin \zeta_i \\ \cos r_i \sin \zeta_i \\ \cos \zeta_i \end{pmatrix}. \quad (2)$$

- (c) Die Vielfachen  $t_i$  der Vektoren  $vec_i$  werden so bestimmt, dass die quadrierten Distanzen zwischen ihren Endpunkten den quadrierten Distanzen  $d_{ij}^2$  zwischen den Anschlusspunkten aus (a) entsprechen. Aus dieser Forderung ergibt sich ein System aus drei *quadratischen* Gleichungen (3) und einigen den Lösungsraum einschränkenden Bedingungen:

$$\begin{aligned} d_{ij}^2 &= (t_i vec_i - t_j vec_j) \cdot (t_i vec_i - t_j vec_j), \\ \{t_1, t_2, t_3\} &= \epsilon \{ \text{Reals} \}, \\ \{t_1, t_2, t_3\} &> 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Diese quadratischen Gleichungen ergeben sich auch aus der Anwendung des Cosinussatzes für jedes Paar von Anschlussrichtungen, wenn man beachtet, dass  $vec_i \cdot vec_j$  der Cosinus des räumlichen Winkels zwischen den Anschlusspunkten  $AP_i$  und  $AP_j$  ist:  $d_{ij}^2 = t_i^2 + t_j^2 - 2t_i t_j vec_i \cdot vec_j$ .

- (d) Die Bestimmung der drei Multiplikatoren  $t_i$  überlassen wir einer *Solve*-Routine, wie sie in Python, MatLab

oder Mathematica gebräuchlich sind. (Mit dem Computeralgebraprogramm Mathematica, Version 10.3, 2015 wurde eine analytische Lösung erzeugt, die jedoch nicht genügend vereinfacht werden konnte, um sie hier wiederzugeben.) Imaginäre Lösungen, negative oder Null-Multiplikatoren wurden aus naheliegenden Gründen ausgeschlossen.

- (e) Mit den  $t_i$  ist die Lage des Ursprungs des Standpunktkoordinatensystems gegenüber der aus den drei Anschlusspunkten gebildeten Ebene definiert. Mit den  $t_i$  liegen die Distanzen des eigenen Standpunktes zu den Anschlusspunkten vor.
- (f) Wir berechnen die Endpunkte der verlängerten Vektoren ( $\rightarrow P_i$ ) im SKS mit (4):

$$P_i^{SKS} = t_i vec_i. \quad (4)$$

- (g) Eine Linearkombination (6) aus den Vektoren zwischen den drei  $P_i$  (5)

$$\begin{aligned} vec_{12}^P &= P_2^{SKS} - P_1^{SKS} \\ vec_{13}^P &= P_3^{SKS} - P_1^{SKS} \\ vec_{123}^P &= vec_{12}^P \times vec_{13}^P \end{aligned} \quad (5)$$

$$s_1 vec_{12}^P + s_2 vec_{13}^P + s_3 vec_{123}^P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

- (h) führt zur Definition des Ursprungs  $\{0, 0, 0\}$  gegenüber den Anschlusspunkten im Standpunktkoordinatensystem. Die  $s_i$  des Standpunktkoordinatensystems werden in das Objektkoordinatensystem übertragen (7). Für die Vorstellung: Der aus den  $P_i$  und  $\{0, 0, 0\}$  im SKS gebildete Tetraeder wird auf die Anschlusspunkte gesetzt, um die Koordinaten des eigenen Standpunktes im OKS zu erhalten.

$$S^{OKS} = \begin{pmatrix} S_x^{OKS} \\ S_y^{OKS} \\ S_z^{OKS} \end{pmatrix} = s_1 vec_{12}^{AP} + s_2 vec_{13}^{AP} + s_3 vec_{123}^{AP}. \quad (7)$$

- (i) Die im OKS zugrunde liegenden Basisvektoren wurden, analog zu (5), aus den Differenzen zwischen den Anschlusspunkten  $AP_i$  berechnet (8):

$$\begin{aligned} vec_{12}^{AP} &= AP_2 - AP_1 \\ vec_{13}^{AP} &= AP_3 - AP_1 \\ vec_{123}^{AP} &= vec_{12}^{AP} \times vec_{13}^{AP} \end{aligned} \quad (8)$$

Alternativ zu den Schritten (f) bis (h) kann mit den Distanzen  $t_i$  eine Trisphäration gerechnet und eindeutig aufgelöst werden.

- (j) Auflösung mehrdeutiger Lösungen.

Für knapp die Hälfte der Fälle kennen wir nun die eigene Position im Koordinatensystem der Anschlusspunkte, *OKS*. Für die anderen muss in der Menge der Lösungen des Gleichungssystems (3) die Richtige gefunden werden. Dafür bedarf es allerdings zusätzlicher Information, wie die Kenntnis der Neigung der aus den drei Anschlusspunkten gebildeten Ebene gegenüber – beispielsweise – der Z-Richtung des Objektkoordinatensystems. Die richtige Lösung ist jene, bei der die Z-Richtung des *SKS* (Stehachse des Instrumentes) gegenüber der Ebene, die durch die  $P_i^{SKS}$  gebildet wird, so geneigt ist, wie die Z-Achse des *OKS* gegenüber der Ebene der drei Anschlusspunkte. Anders ausgedrückt lautet das Entscheidungskriterium (9): Es wird jene Lösung gewählt, bei der die Differenz zwischen den Neigungen der Ebene im *SKS* und im *OKS* gegenüber der jeweiligen Z-Achse *minimal* ist. Nach den vorliegenden Erfahrungen werden die Neigungen im Rahmen der Genauigkeit übereinstimmen. Die Differenz in (9) bei der richtigen Lösung wird rund Null.

$$|vec_{123}^P| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - |vec_{123}^{AP}| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{Min}_{\text{Lösungen}(GS3)}. \quad (9)$$

Kurz: Die Z-Komponente der Ebenennormale mit der Länge 1 soll etwa gleich groß sein bei der Ebene der Anschlusspunkte im *OKS* und bei der Ebene der  $P_i$  im System *SKS*.

## 2.4 Zur Lösung des Gleichungssystems

Jede der drei quadratischen Gleichungen in (3) beschreibt im aus Standpunkt und zwei Anschlusspunkten gebildeten Dreieck die gegenseitige Abhängigkeit der Distanzen zu den Anschlusspunkten ( $t_1-t_2$ ,  $t_2-t_3$ ,  $t_1-t_3$ ). Entsprechend gibt es drei paarweise Zusammenhänge, bei denen die Distanz zum jeweils dritten Anschlusspunkt keine Rolle spielt. In Abb. 7 sind die drei Gleichungen der drei Raumwinkel ( $AP_1-SP-AP_2$ ,  $AP_2-SP-AP_3$  und  $AP_3-SP-AP_1$ ) jeweils in einer Koordinatenebene eines  $t_1-t_2-t_3$ -Koordinatensystems mit Gültigkeit für beliebige Werte der dritten Koordinate, daher als Flächen, eingetragen: Die rote Fläche beschreibt  $t_2=f[t_1]$ , die grüne Fläche  $t_3=f[t_2]$  und die blaue Fläche  $t_3=f[t_1]$ , siehe (10). Der eigene Standpunkt ergibt sich als Schnitt der drei einfach gekrümmten Flächen. In dieser Simulation waren alle drei räumlichen Winkel größer als  $100^{\text{gon}}$  ( $139$ ,  $105$  bzw.  $147^{\text{gon}}$ ), die Lösung eindeutig.

$$t_j = t_j[t_i] = t_i \cdot vec_i \cdot vec_j \pm \sqrt{d_{ij} - t_i^2 + t_j^2 (vec_i \cdot vec_j)^2} \quad (10)$$

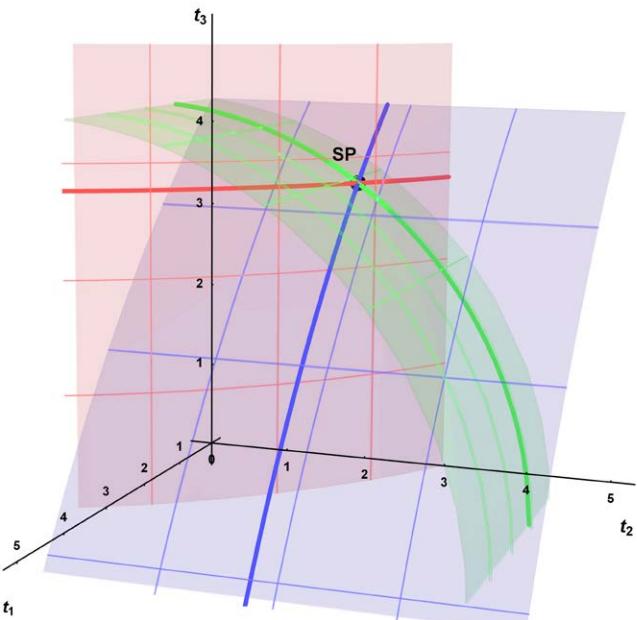


Abb. 7: Veranschaulichung des Gleichungssystems zur Lösung des räumlichen Rückwärtsschnittes. Die rote, grüne und blaue Fläche zeigt je eine der paarweisen Abhängigkeiten  $\{t_2=f[t_1], t_3=f[t_2], t_3=f[t_1]\}$ .

## 2.5 Zur Mehrdeutigkeit

Mehrdeutigkeiten können ohne zusätzliche Beobachtungen oder einschränkende Annahmen (beispielsweise Mindestabstände zu den Anschlusspunkten) nicht aufgelöst werden. Wenn die räumliche Orientierung des Messsystems unbekannt ist, müssen nach den vorliegenden

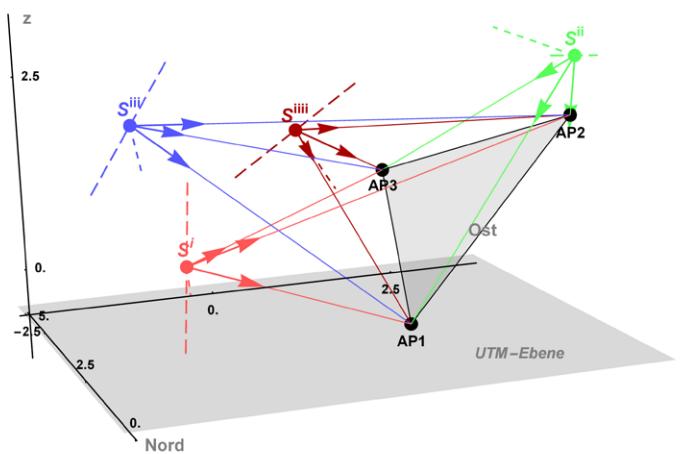


Abb. 8: Veranschaulichung der Mehrdeutigkeit an einem Beispiel: In dieser Simulation ergaben sich vier Lösungen für die Position des Standpunktes:  $S^i$  bis  $S^{iiv}$ . Eingetragen sind die Zielungen zu den Anschlusspunkten sowie die Z-Achse (lang gestrichelt) und die Nullrichtung des Horizontalkreises (kurz gestrichelt). In diesen Aufstellungen wären die beobachteten Richtungen und die ihnen entsprechenden geometrischen Beziehungen (Lage auf einem Kreisbogenabschnitt mit definiertem Radius und teilweise definiertem Mittelpunkt) widerspruchsfrei möglich.

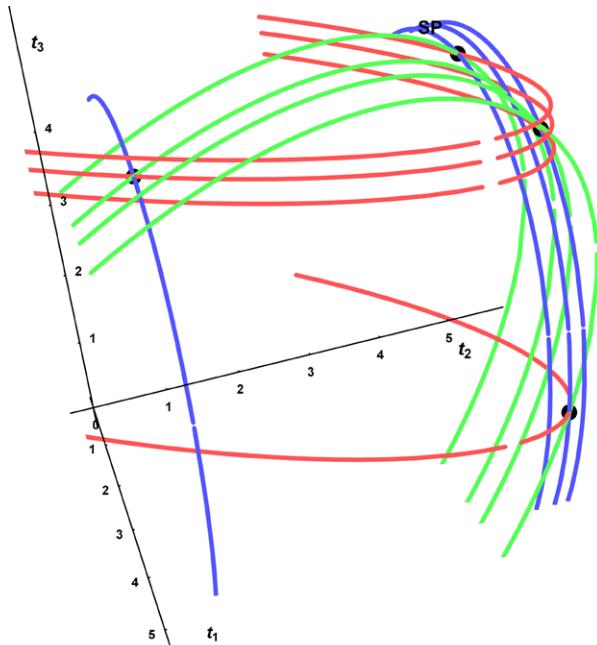


Abb. 9: Veranschaulichung der Mehrdeutigkeit: In dieser Simulation ergaben sich vier Lösungen für die Position des Standpunktes. Die zugrunde liegenden Raumwinkel betrugen 40, 60 bzw. 68 $^{\circ}$ .

Untersuchungen alle rechnerischen Lösungen als »möglich« in Betracht gezogen werden. Abb. 8 zeigt eine Simulation mit vier gleichwertigen Lösungen. Überprüft man die den Berechnungen zugrunde liegenden Messungen, Anschlusspunkte, Rekonstruktionen durch Vorwärtsschnitte und geometrischen Beziehungen, scheinen alle Lösungen plausibel. Daher kann die richtige Lösung auch nicht an den Verbesserungen einer nachfolgenden Ausgleichung identifiziert werden.

Abb. 9 zeigt als Pendant zu Abb. 7 den Lösungsraum von (3) für den Fall einer mehrdeutigen Lösung, jedoch unter Verzicht auf die Darstellung der Flächen, in denen die jeweiligen Kurven gültig sind. Aus drei Paaren gegenseitiger Abhängigkeit zwischen den Distanzen ( $t_i$ ) entstehen durch Bezug auf die dritte Distanz vier mögliche Lösungen des räumlichen Rückwärtsschnittes.

### 3 Eine beispielhafte Anwendung und eine Simulationsuntersuchung

Die Funktionstüchtigkeit des Lösungsalgorithmus soll in drei unterschiedlichen Anordnungen gezeigt werden: zunächst im Bereich der Vermessung von Grundlagennetzen. Hier liegen die Anschlusspunkte meist mehr oder weniger in der Horizontalkreisebene. Dass dies jedoch keine Bedingung ist, soll an Simulationen einer Nahbereichssituation gezeigt werden. Zuletzt werden Daten der tachymetrischen Vermessung eines Laserscannerkalibrierfeldes verwendet, um die Eignung des Lösungsansatzes für die optimierte Parameterschätzung in überbestimmten Messungen zu untersuchen (Abschnitt 4).

### 3.1 Der räumliche Rückwärtsschnitt bei der Vermessung eines Grundlagennetzes

Grafarend und Awange haben in mehreren Publikationen zur Rückwärtspositionierung Daten des Testnetzes »Stuttgart Mitte« verwendet und publiziert. Beispielsweise in Awange und Grafarend (2005, S. 85 f.), Awange et al. (2010, S. 152) oder Awange und Paláncz (2016, S. 257). Die publizierten Daten werden nun hier für die Verifizierung der für den räumlichen Rückwärtsschnitt gefundenen Lösung genutzt. Dafür übernehmen wir die geozentrischen Koordinaten der sieben Anschlusspunkte und zum Vergleich mit der eigenen Lösung die des Standpunktes ( $K1_{Soll}$ ). Weiterhin übernehmen wir die angegebenen berechneten Horizontalkreisablesungen und Vertikalwinkel. Die Distanzen wurden mit den Größen  $\{t_1, t_2, t_3\}$  verglichen.

Für die Lösung des räumlichen Rückwärtsschnittes benötigen wir Richtungsmessungen zu drei Anschlusspunkten. Bei sieben im Testnetz »Stuttgart Mitte« gegebenen Anschlusspunkten bestehen 35 verschiedene Möglichkeiten für das Tupel der unorientierten Richtungen. Auf jede dieser Möglichkeiten wurde der Rechengang nach Abschnitt 2.3.2 angewendet.

Im Testnetz »Stuttgart Mitte« sind 22 der 35 Lösungen für die Parameter  $\{t_1, t_2, t_3\}$  eindeutig. In 13 Fällen treten je zwei Lösungen auf. In Stuttgart fällt die z-Richtung des SKS nicht mit der geozentrischen z-Richtung des OKS zusammen (nördliche Breite von Stuttgart:  $\varphi_{St} = 48^{\circ}47'$ , östliche Länge:  $\lambda_{St} = 9^{\circ}11'$ ). Die Richtung der Kugelnormale genügte zur Entscheidung für die richtige Lösung; das modifizierte Entscheidungskriterium (9a) lautet:

$$|\vec{vec}_{123}^P| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - |\vec{vec}_{123}^{AP}| \cdot \begin{pmatrix} \sin \varphi_{St} \cos \lambda_{St} \\ \cos \varphi_{St} \sin \lambda_{St} \\ \sin \varphi_{St} \end{pmatrix} = \text{Min}_{\text{Lösungen}(GS3)}. \quad (9a)$$

Die größte Abweichung einer Koordinate zwischen den mit dem räumlichen Rückwärtsschnitt auf die beschriebene Weise bestimmten Standpunktkoordinaten  $K1_{1st}$  und der Vorgabe aus der angegebenen Literatur  $K1_{Soll}$  betrug über alle 35 Varianten 0,17 mm. Auch die berechneten  $\{t_1, t_2, t_3\}$  stimmten millimetergenau mit den angegebenen Distanzen überein.

### 3.2 Simulierte Nahbereichsvermessung

3D-Koordinaten der Anschlusspunkte und des Standpunktes ( $S_{Soll}$ ) wurden mit einem Zufallszahlengenerator für gleichverteilte Zahlen erzeugt. Der Wertebereich betrug in allen drei Dimensionen  $\pm 5$ . In Abb. 10 sieht man ein Konfigurationsbeispiel. Der Stichprobenumfang soll alle möglichen geometrischen Anordnungen abdecken.

Aus den Koordinaten wurden vertikale und horizontale Kreisablesungen berechnet, letztere wurden mit einer

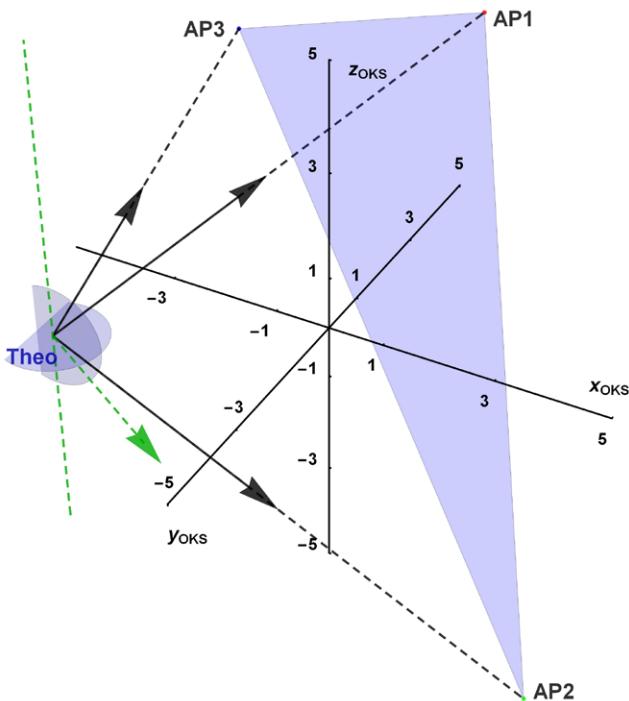


Abb. 10: Simulierte Aufnahmesituation zur Verifikation des räumlichen Rückwärtsschnittes: Dargestellt sind Stehachse und Nullrichtung des Horizontalkreises (gestrichelt grün) und horizontaler und vertikaler Ablesekreis des Theodoliten sowie die Zielungen zu drei Anschlusspunkten  $AP_1$  bis  $AP_3$  im Objektkoordinatensystem.

zufälligen Orientierungsunbekannten verändert. Auf die Daten der Richtungen und der Anschlusspunkte wurde der Algorithmus von Abschnitt 2.3.2 angewendet. In allen 100.000 Fällen stimmte die berechnete 3D-Koordinate des Standpunktes mit der Vorgabe überein. Die Rechenzeit des suboptimalen »Wissenschaftlerskriptes« dauerte mit Mathematica am Arbeitsplatz-PC kaum 30 Minuten.

Wurde die Richtung der Z-Achse gegenüber dem OKS zufällig geneigt, stimmten die eindeutigen Lösungen weiterhin exakt mit den Startwerten der Simulation überein. Bei mehrdeutigen Ergebnissen traten erwartungsgemäß grobe Fehler auf, weil die richtige Lösung nicht erkannt werden konnte.

Beide Anwendungen zeigen die prinzipielle Funktionsfähigkeit der Lösungsidee und ihrer algorithmischen Umsetzung. In allen Fällen wurde problemlos die richtige Lösung gefunden – allerdings mit *fehlerfreien* Daten. In den folgenden Abschnitten werden reale, fehlerbehaftete Messwerte verwendet.

## 4 Die überbestimmte Lösung durch Ausgleichsrechnung

### 4.1 Testfeld: Ein 3D-Kalibrierfeld

2005 wurde an der TU Bergakademie Freiberg ein Testfeld für die Überprüfung und Kalibrierung terrestrischer Laserscanner angelegt (siehe auch Abb. 11). Auf dem



Abb. 11: Kalibrierfeld der TU Bergakademie Freiberg, 12 Jahre nach der Messung

Instrumentenstandpunkt Nr. 104 des Kalibrierungsfeldes wurden 2007 von T. Martienßen und F. Reichel 17 Anschlusspunkte angemessen. Deren Koordinaten  $\{x, y, z\}$  beziehen sich auf ein lokales kartesisches Koordinatensystem. Aus dem CAPLAN-Projekt wurden die Koordinaten, die Horizontalkreisablesungen sowie die Zenitwinkel entnommen. Interessierten werden die Daten als Zahlenbeispiel in Tab. 1 angegeben.

### 4.2 Vorab zur Ausgleichung

Bei der vermessungstechnischen 3D-Positionierung beträgt die Anzahl der Unbekannten drei. Hinzu kommt gegebenenfalls eine Orientierungsunbekannte. Die Anzahl der Beobachtungen setzt sich aus der Anzahl der Horizontal- und Vertikalrichtungsmessungen, gegebenenfalls zuzüglich der fehlerbehafteten Koordinaten zusammen. Die Messung der räumlichen Winkel in zwei zueinander senkrechten Ebenen – sowohl in der Vermessungstechnik als auch in der Photogrammetrie – führt zur doppelten Anzahl der Richtungsbeobachtungen gegenüber einer theoretisch denkbaren direkten Messung räumlicher Winkel. Von diesem Vorteil wird in Abschnitt 6 Gebrauch gemacht.

Näherungswerte der unbekannten Koordinaten des Standpunktes wurden unter Verwendung von drei zufällig gewählten Anschlusspunkten und Anwendung eines Unterprogrammes, das die eigene Position nach dem Algorithmus gemäß Abschnitt 2.3 bestimmt, berechnet. Aus dem Näherungswert für den gesuchten Standort wurde der Näherungswert für die Orientierungsunbekannte abgeleitet (für genauere Ausführungen siehe Abschnitt 5).

### 4.3 Ausgleichungsansatz mit Gauß-Markov-Modell

Unter der Annahme fehlerfreier Anschlusspunkte können die Richtungsmessungen als Funktionen der Unbekannten,  $\{x_s, y_s, z_s\}$ , und der Orientierungsrichtung  $o$  in (11) ausgedrückt werden. Jeder Anschlusspunkt liefert zwei

Tab. 1: Auf dem Punkt 104 des Kalibrierfeldes der TU Bergakademie Freiberg gemessene horizontale Richtungen, Zenitwinkel und Koordinaten der Zielpunkte

Zielpunkt	Horizontalkreisablesung [gon]	Zenitwinkel [gon]	x [m]	y [m]	z [m]
102	150,29353	100,27364	100,000	115,244	99,941
15	155,89340	94,82426	99,161	117,165	100,999
16	155,89542	87,32751	99,162	117,166	102,497
24	159,51213	68,61498	105,322	112,333	102,475
23	200,53229	59,23923	108,140	112,322	102,449
13	196,12769	91,69322	106,750	117,091	101,058
14	196,15304	66,44789	106,753	117,093	104,741
26	200,72222	125,82256	108,152	112,337	98,602
11	252,17447	93,45736	114,555	117,028	100,998
12	252,23711	84,27226	114,563	117,022	102,461
103	254,46144	100,17376	113,308	114,912	99,967
10	278,36893	76,83493	114,388	112,412	102,484
8	332,59332	84,28785	114,302	107,219	101,481
9	332,68377	74,67531	114,302	107,210	102,483
18	99,56221	90,35108	99,129	107,359	101,473
19	99,53635	84,07557	99,126	107,355	102,473
17	133,43603	84,39617	99,195	112,583	102,513

Absolute Häufigkeit

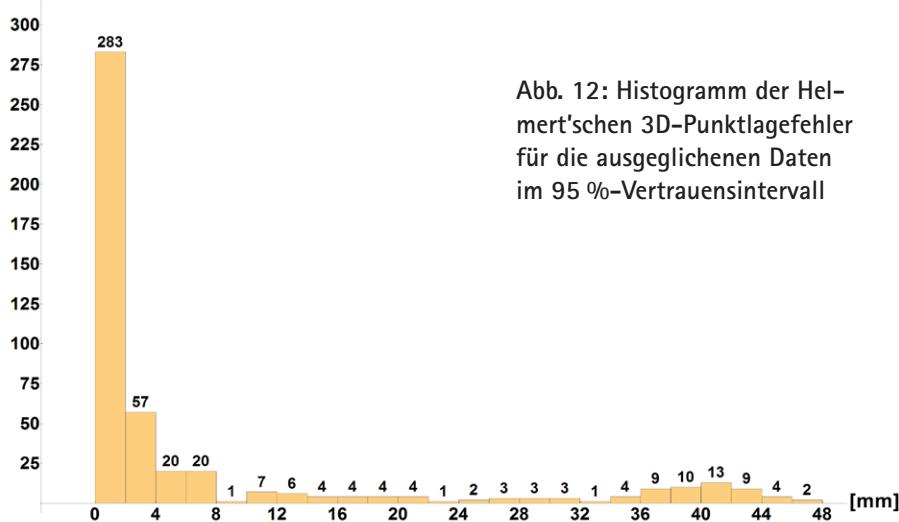


Abb. 12: Histogramm der Helmert'schen 3D-Punktlagefehler für die ausgeglichenen Daten im 95 %-Vertrauensintervall

Beobachtungen für die Bestimmung der insgesamt vier Unbekannten: drei Koordinaten und die Orientierungsunbekannte.

$$\begin{aligned} \text{func}_r &= \text{ArcTan} \left[ \frac{x_{AP} - x_S}{y_{AP} - y_S} \right] - o, \\ \text{func}_\zeta &= \text{ArcCot} \left[ \frac{z_{AP} - z_S}{\sqrt{(y_{AP} - y_S)^2 + (x_{AP} - x_S)^2}} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Interessant scheinen allein die Ausgleichungen auf der Grundlage von drei Anschlusspunkten. Um dies zu unter-

suchen wurden unter Ausschluss von vier grob fehlerbehafteten Kombinationen die verbleibenden 676 Punktkombinationen durchgerechnet. Diese Vorgehensweise ergab einen mittleren Helmert'schen Lagefehler über alle drei Koordinaten von 10 mm. Die maximale Koordinatendifferenz gegenüber dem Sollwert betrug 11 cm (siehe Histogramm in Abb. 12). Es darf nicht vergessen werden, dass diese Angaben eher qualitativen Charakter haben, da die Ergebnisse stark von der geometrischen Konstellation des Standpunktes im Testfeld abhängen.

#### 4.4 Ausgleichungsansatz mit Gauß-Helmert-Modell

Als Beispiel für eine Berechnung mit dem Gauß-Helmert-Modell wird eine »weiche Lagerung« gerechnet, d.h. die Koordinaten der Anschlusspunkte gehen als direkte Beobachtungen in die Ausgleichung ein. Die Standardabweichung der Anschlusspunkte wurde 2007 in der Lage mit 0,3 mm und in der Höhe mit 0,2 mm angegeben und mit diesen Werten in den Rückwärtsschnitt einge führt. A priori wurden die Standardabweichungen für

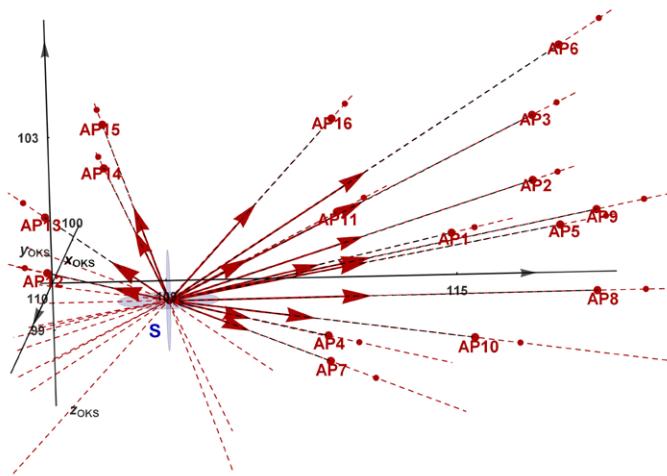


Abb. 13: Das funktionale Modell der Gauß-Helmert-Ausgleichung: Standpunkt  $S$ , Anschlusspunkte  $AP_i$  und zugehörige Zielrichtungen liegen jeweils auf einer Geraden.

die horizontale Richtung mit  $2^{\text{mgon}}$  und für die vertikale mit  $3^{\text{mgon}}$  übernommen.

Als funktionales Modell wurden die Lage des Standpunktes, repräsentiert durch den Ortsvektor  $\vec{S}$  des Standpunktes, die Lage eines Anschlusspunktes, Ortsvektor  $\vec{AP}$ , und die durch dazugehörige Horizontal- und Vertikalwinkelkreisablesung bestimmte 3D-Richtung  $\vec{u}$  als Elemente einer gemeinsamen Geraden angesetzt (Veranschaulichung in Abb. 13). Mathematisch ausgedrückt: Die Entfernung eines dieser drei Punkte zur durch die anderen beiden Punkte definierten Geraden sei Null! Eine geeignete Formel für den räumlichen Abstand eines Punktes von einer durch Punkt und Richtung gegebenen Geraden lautet:

$$\frac{|\overrightarrow{AP} - \vec{S} \times \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 0. \quad (12)$$

Jeder Anschlusspunkt ergibt mit den ihm zugehörigen Richtungen eine Bedingungsgleichung (12). Für die Orientierungsunbekannte  $o$  kann eine zusätzliche Bedingung (13) angegeben werden: Horizontalkreisablesung plus Orientierungsunbekannte minus gerechneter Orientierungsrichtung sei Null!

$$o - \text{ArcTan} \left[ \frac{AP_x - SP_x}{AP_y - SP_y} \right] + r = 0. \quad (13)$$

Damit führt die Messung zu einem Anschlusspunkt je zu einer Bedingungsgleichung. Die Messungen zu drei räumlichen Anschlusspunkten ermöglichen eine eindeutige Lösung, jeder zusätzliche Anschlusspunkt führt zu einer Überbestimmung. Mit diesen Daten erhält man aus Messungen zu allen 17 Anschlusspunkten eine innere Genauigkeit in der Lage, gleich der Genauigkeit der Anschlusspunkte:  $a$  posteriori 0,01 mm und in der Höhe etwas schlechter 0,02 mm. Zum Vergleich seien die

ausgeglichenen Koordinaten des Standpunktes angegeben:  $S_{xyz} = \{108,6902 \text{ m}, 109,1575 \text{ m}, 99,9852 \text{ m}\}$ .

## 5 Genauigkeitsfragen und »gefährliche Orte«

Die Untersuchungen mit fehlerfreien Daten (Abschnitte 3.1 Testnetz »Stuttgart Mitte« und 3.2 Simulation Nahbereichsvermessung) zeigten perfekte Ergebnisse. Der vorgestellte Beispielalgorithmus (Abschnitt 2.3) löste auch die geometrischen Konfigurationen, in denen der eigene Standpunkt und die beiden Anschlusspunkte in einer Ebene liegen; Abb. 14 zeigt ein Konfigurationsbeispiel, anstandslos und ohne weitere Vorkehrungen.

Die Untersuchung der Eignung des Algorithmus für praktische, d. h. messfehlerbehaftete, Anwendungen erfolgte an den Daten des Laserscannerkalibrierfeldes (Abschnitt 4.1). Aus den 17 Anschlusspunkten ergeben sich 680 verschiedene Möglichkeiten für die Berechnung des räumlichen Rückwärtsschnittes zur Standpunktbestimmung.

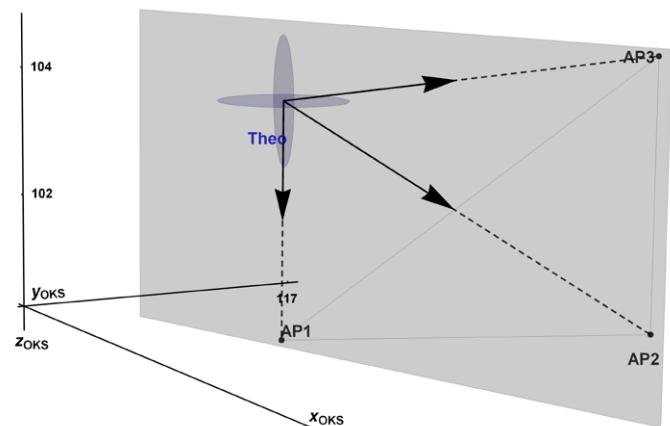


Abb. 14: Beispiel einer simulierten Aufnahmesituation zur Verifikation des räumlichen Rückwärtsschnittes mit der Vorgabe: Standpunkt liegt in der Ebene der Anschlusspunkte.

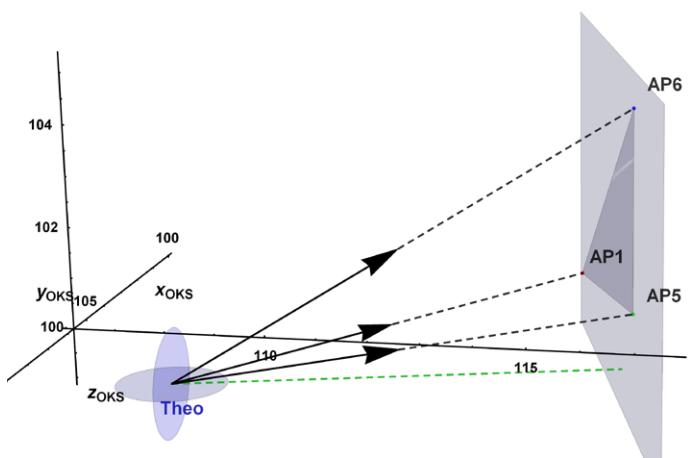


Abb. 15: Aufnahmesituation der einen Fehlauflösung der Mehrdeutigkeiten

Punktkombinationen, die nahezu eine Gerade bilden, könnten vorab ausgeschlossen werden.

Bei der Berechnung der 680 Varianten konnte in vier Konstellationen keine Lösung gefunden werden. Darüber hinaus gab es zwei unbrauchbare Ergebnisse mit Lagefehlern von 10 bzw. 9 m. In diesen beiden Fällen wurde nach dem Entscheidungskriterium aus Abschnitt 2.3.2 (j) eine falsche Lösung ausgewählt; eine der beiden Konfigurationen zeigt Abb. 15. Bei den Kombinationen der Anschlusspunkte ( $AP_1, AP_6, AP_7$ ), ( $AP_5, AP_{16}, AP_{17}$ ) gab es vier bzw. zwei Lösungen. Die richtige Lösung war um etwa 20<sup>mgon</sup> stärker gegenüber der Z-Achse geneigt als die gewählte Falsche. Der Fehlgriff um einige Milligon zieht eine deutliche Fehllage des im räumlichen Rückwärtsschnitt berechneten Instrumentenstandpunktes nach sich. Hier könnten lokale Plausibilitätskriterien helfen. Falls orientierte Richtungen vorliegen, können auch die Neigungen der Ebenen gegenüber der x- und y-Achse in die Auswahl der richtigen Lösung einbezogen oder die eigene Position aus dem überbestimmten Schnitt der drei Zielachsen geschätzt werden.

Abb. 16 zeigt das Histogramm der XYZ-Gesamtresiduen (euklidischer Abstand) im Bereich des Vertrauensintervalls »90 %« der verbleibenden 676 Varianten: In etwa der Hälfte der Fälle betragen die Abweichungen weniger als 5 mm.

Mit zunehmender Unsicherheit der Richtungsmessungen oder der Koordinaten der Anschlusspunkte verschlechtert sich das Ergebnis. Dies wurde in einigen Simulationsrechnungen sichtbar. Wurden beispielsweise die Richtungsmessungen mit (zusätzlichem) normalverteiltem Rauschen mit Standardabweichungen von 2<sup>mgon</sup> (Horizontalkreis) und 3<sup>mgon</sup> (Vertikalkreis) verfälscht, stieg der Fehleranteil im Bereich 5 bis 20 mm. Die Anzahl grober Fehler oder die Anzahl der Konfigurationen, in denen keine Lösung gefunden werden konnte, blieb demgegenüber stabil.

Um auch in den Fällen, in denen es keinen gemeinsamen Schnittpunkt der drei Rotationskörper gibt, Nähe-

rungslösungen zu erhalten, wurde eine der aus den Anschlusspunkten berechneten Distanzen durch Addition von  $\pm 1$  cm zu einem Bereich erweitert. Mit dem so modifizierten Gleichungssystem (3 neu)

$$\begin{aligned} d_{12}^2 &= (t_1 \vec{v}_1 - t_2 \vec{v}_2) \cdot (t_1 \vec{v}_1 - t_2 \vec{v}_2), \\ d_{23}^2 &= (t_2 \vec{v}_2 - t_3 \vec{v}_3) \cdot (t_2 \vec{v}_2 - t_3 \vec{v}_3), \\ (d_{13} + 10^{-2})^2 &\geq (t_1 \vec{v}_1 - t_3 \vec{v}_3) \cdot (t_1 \vec{v}_1 - t_3 \vec{v}_3), \\ (d_{13} - 10^{-2})^2 &\leq (t_1 \vec{v}_1 - t_3 \vec{v}_3) \cdot (t_1 \vec{v}_1 - t_3 \vec{v}_3); \end{aligned} \quad (3 \text{ neu})$$

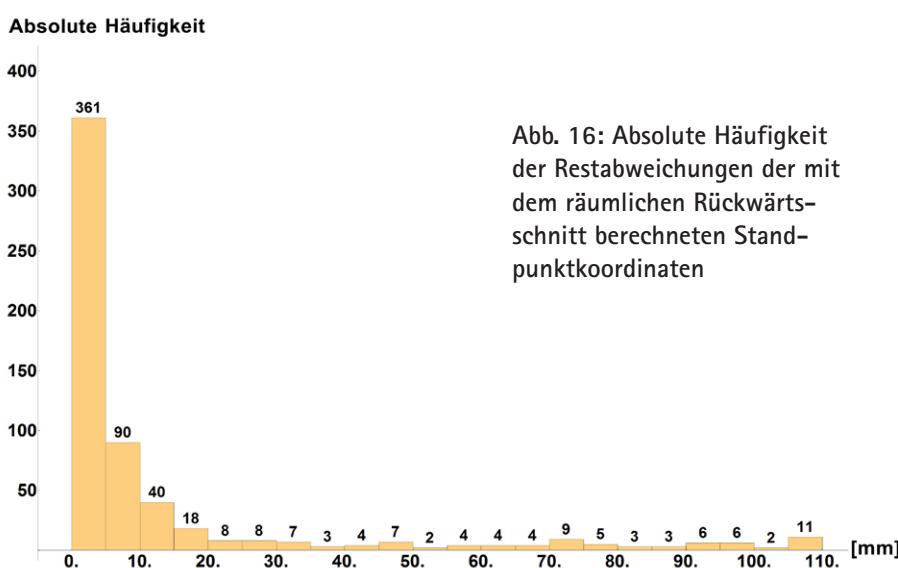
$$\begin{aligned} \{t_1, t_2, t_3\} &= \epsilon \{\text{Reals}\}, \\ \{t_1, t_2, t_3\} &> 0 \end{aligned}$$

konnten auch mit den mit einem Zufallszahlengenerator um wenige Milligon zusätzlich verfälschten Richtungsmessungen mindestens grobe Näherungen bestimmt werden.

## 6 Schlussfolgerungen

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde von gemessenen räumlichen Winkeln ausgegangen, die es in Vermessungstechnik und Photogrammetrie nicht gibt. Sowohl mit einem Theodolit als auch mit einer Messkamera werden räumliche Winkel stets zerlegt in orthogonale Komponenten gemessen. Für die Rückwärtspositionierung stehen damit sechs Beobachtungen drei unbekannten Koordinaten gegenüber. Unter der *Annahme exakt übereinstimmender Richtungen der Z-Achsen des Standpunktkoordinatensystems und des Objektkoordinatensystems* kann die eigene Position aus mindestens einer vertikalen und zwei weiteren orientierten horizontalen oder vertikalen Richtungen abgeleitet werden. Abb. 17 zeigt das Prinzip der Positionsbestimmung aus drei Vertikalrichtungen. Ist die horizontale Orientierung unbekannt, stehen für den Rückwärtsschnitt sechs Beobachtungen für die Bestimmung von vier Unbekannten zur Verfügung.

Liegen mehr als drei orientierte Richtungen vor, kann diese Überbestimmung für eine präzisierende Ausgleichung genutzt werden. Diese Vorgehensweise ist in der vermessungstechnischen Standardsituation der übereinstimmenden Z-Achsenrichtungen die gebotene Wahl bei horizontalen und vertikalen Zielungen zu drei oder mehr Anschlusspunkten. Aber auch eine getrennte Bestimmung der Lage nach den bekannten



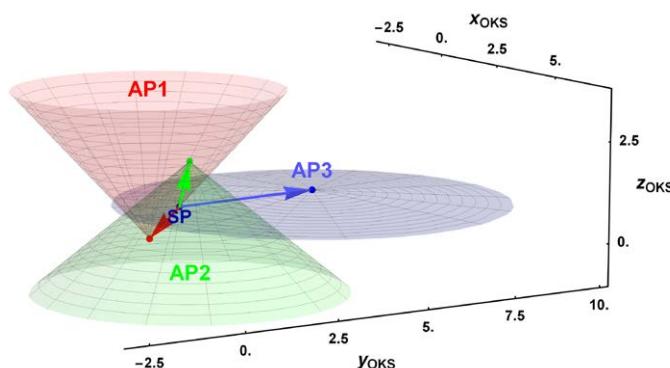


Abb. 17: Prinzip der Rückwärtspositionierung aus der Messung von drei Vertikalwinkeln: Die im Standpunkt (SP) zu den Anschlusspunkten (AP) gemessenen vertikalen Richtungen werden als Kreiskegel um die Anschlusspunkte vorgestellt. AP<sub>1</sub> wurde mit einer steilen Zielung nach unten, AP<sub>2</sub> mit einer steilen Zielung nach oben und AP<sub>3</sub> etwa horizontal angezielt. Die drei Kreiskegel schneiden sich im Raum im Neupunkt SP.

Verfahren des ebenen Rückwärtsschnittes und der Höhe durch trigonometrische Höhenbestimmung ist bei übereinstimmenden Z-Achsenrichtungen exakt.

Ist jedoch auch die »vertikale Orientierung«, besser: die Richtung der Z-Achse des Winkelmessinstruments, unbekannt, sind sechs Unbekannte zu bestimmen (Standardsituation der Photogrammetrie: »Rückwärtsschnitt mit minimaler Objektinformation« (Luhman 2018, S. 281f.). Die Messungen zu drei Anschlusspunkten genügen jedoch nicht, wenn die rechnerische Auflösung des GS 3 mehrdeutig ist. Mehrdeutigkeiten treten auf, wenn die räumlichen Winkel zwischen den Anschlussrichtungen kleiner als 100° betragen und der Neupunkt nahe einem Anschlusspunkt liegt, wie die Betrachtungen zu den Schnitten der Rotationsfiguren und die eigenen Simulationen gezeigt haben.

Für den Fall, dass die Z-Achse des Instrumentes immerhin näherungsweise mit der Z-Achse des Objektkoordinatensystems übereinstimmt, kann diese Ähnlichkeit oder die Reihenfolge der horizontalen und vertikalen Messungen für die Auflösung der Mehrdeutigkeiten erfolgreich genutzt werden.

Wurde für die Formulierung von (3) nicht der Cosinussatz, sondern eine mutmaßlich ungeschickte Verschachtelung von Sinussätzen verwendet, sortierte das Solve-Tool einige Lösungen wegen Inkonsistenz oder Redundanz transzendenten Gleichungen aus. Inwieweit diese Eigenschaft zur Auflösung der Mehrdeutigkeiten genutzt werden kann, wäre bei Bedarf noch zu klären.

## 7 Fazit

Für den räumlichen Rückwärtsschnitt wird für die Vermessungstechnik empfohlen, zunächst auf Basis der räumlichen Winkel oder eines herkömmlichen trigonometrischen Verfahrens eine Näherungsposition zu be-

stimmen und mit diesen Werten eine Gauß-Markov-Ausgleichung durchzuführen. Bei freier Orientierung des Messsystems kann die Mehrdeutigkeit nicht ohne Zusatzinformation aufgelöst werden. Bei den eindeutigen Lösungen können auch die Rotationen berechnet werden.

Summa summarum wurde ein universelles Verfahren für den räumlichen Rückwärtsschnitt entwickelt, welches auf elementarer Geometrie beruht. Seine mathematischen Gleichungen haben quadratische Form. In jedem zweiten Fall ist die Lösung mehrdeutig. Die Mehrdeutigkeit kann in Abhängigkeit der Präzision der Richtungen und der Koordinaten der Anschlusspunkte nahezu fehlerfrei automatisiert aufgelöst werden, wenn die Richtung der Stehachse mit der Z-Richtung des Objektkoordinatensystems übereinstimmt. Fehlentscheidungen können dann auftreten, wenn die aus den Anschlusspunkten gebildete Ebene sehr genau senkrecht zur xy-Ebene steht. Ob sich eine weitere Untersuchung dieser Fehlentscheidungen lohnt, sollte davon abhängig gemacht werden, welchen Stellenwert der räumliche Rückwärtsschnitt in der vermessungstechnischen Praxis künftig einnimmt.

## Literatur

- Awange, J. L., Grafarend, E. W., Fukuda, Y. (2003): Closed form solution of the triple threedimensional intersection problem. *zfv* 128: 395–402 (zit. in: Awange und Paláncz 2016, S. 336).
- Awange, J. L., Grafarend, E. W. (2005): Solving Algebraic Computational Problems in Geodesy and Geoinformatics. Springer. Berlin–Heidelberg. 2005, 333 S.
- Awange, J. L., Grafarend, E. W., Paláncz, B., Zaletnyk, P. (2010): Algebraic Geodesy and Geoinformatics, Springer; 2. Auflage, 377 S.
- Awange, J. L., Paláncz, B. (2016): Geospatial Algebraic Computations: Theory and Applications. 3. Auflage, 541 S.
- Grafarend, E. W., Lohse, P., Schaffrin B. (1989): Dreidimensionaler Rückwärtsschnitt. *ZfV – Zeitschrift für Vermessungswesen* 114: 61–67, 127–137, 172–175, 225–234, 278–287 (zit. in: Awange und Paláncz 2016, S. 355).
- Grafarend, E. W., Shan, J. (1997): Closed-form solution of P4P or the three-dimensional resection problem in terms of Möbius barycentric coordinates. *J Geod* 71: 217–231 (zit. in: Awange und Paláncz 2016, S. 412).
- Grunert, J. A. (1841): Das Pothenotsche Problem in erweiterter Gestalt; nebst Bemerkungen über seine Anwendungen in der Geodäsie. Grunerts Archiv für Mathematik und Physik 1: 238–241 (zit. in: Awange und Paláncz 2016, S. 335).
- Lehmann, R. (2018): Räumliche Geodätische Berechnungen. HTW Dresden. 38 S. [www.dubio-pro-geo.de/script/Lehmann18b.pdf](http://www.dubio-pro-geo.de/script/Lehmann18b.pdf), letzter Zugriff: 6.6.2019.
- Luhmann, T. (2018): Nahbereichsphotogrammetrie, 4. Auflage, Wichmann, 796 S.
- Rohrberg, K. (2009): Geschlossene Lösung für den räumlichen Rückwärtsschnitt mit minimaler Objektinformation. In: Luhmann/Müller (Hrsg.) Photogrammetrie – Laserscanning – Optische 3D-Messtechnik, Oldenburger 3D-Tage 2009, Wichmann, Heidelberg, 332–339.

## Kontakt

Priv.-Doz. Ralf Ulrich Donner  
TU Bergakademie Freiberg  
Institut für Markscheidewesen und Geodäsie  
ralf.donner@tu-freiberg.de

Dieser Beitrag ist auch digital verfügbar unter [www.geodaeisie.info](http://www.geodaeisie.info).