

Zur Ausgleichung angeschlossener Höhennetze

On the Adjustment of Height Networks

Frank Neitzel

Zusammenfassung

In diesem Beitrag wird die Ausgleichung angeschlossener Höhennetze besprochen. Obwohl es sich dabei um ein lineares Ausgleichungsproblem handelt, das direkt gelöst werden kann, finden sich in der Literatur oftmals Lösungen unter Einführung von Näherungswerten für die unbekannten Neupunkthöhen. Im Beitrag werden sowohl die direkte Lösung als auch die Lösung unter Verwendung von Näherungswerten gezeigt. Eine umgekehrt chronologische Besprechung relevanter Literaturquellen zeigt die Lösungsansätze in der Literatur und versucht zu klären, warum für ein lineares Ausgleichungsproblem in vielen Publikationen die Einführung von Näherungswerten für die Unbekannten erfolgt.

Schlüsselwörter: Höhennetze, Nivellementsnetze, Ausgleichungsrechnung, Näherungswerte

Summary

This article discusses the adjustment of height networks in which the heights of new points are determined by including measurements to fixed points of known elevation (benchmarks). Despite the fact that this is a linear adjustment problem that can be solved directly, solutions using approximate values for the unknown heights of the new points can often be found in the literature. This contribution shows both the direct solution and the solution using approximate values. A reverse chronological discussion of relevant literature sources shows the proposed solution approaches and attempts to clarify why approximate values for the unknowns are introduced in many publications for solving a linear adjustment problem.

Keywords: height networks, levelling networks, adjustment calculation, approximate values

1 Einführung

Betrachtet werden überbestimmte Höhennetze, in denen Höhenunterschiede zwischen Neupunkten und Höhenfestpunkten, die auch als Anschlusspunkte bezeichnet werden, per Nivellement gemessen wurden. Das Ziel besteht darin, für die Neupunkte ausgeglichene Höhen zu berechnen. Führt man als Parameter die Höhen H_i , H_j ein, ergibt sich das funktionale Modell zu

$$L_{ij} = H_j - H_i, \quad (1)$$

wobei mit L_{ij} der nivellitisch bestimmte Höhenunterschied zwischen den Punkten P_i und P_j bezeichnet ist. In (1) werden die Beobachtungen als Funktion der Unbekannten dargestellt, was zu einer Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen führt, siehe (Niemeier 2008, S. 120) oder unter Einbeziehung einer Varianz-Kovarianzmatrix für die Beobachtungen zum sogenannten Gauß-Markov-Modell, siehe (Niemeier 2008, S. 137).

Aufgrund des linearen funktionalen Modells resultieren ursprünglich lineare Verbesserungsgleichungen und das Normalgleichungssystem der Ausgleichungsrechnung kann direkt, d. h. ohne Einführung von Näherungswerten für die Unbekannten gelöst werden. Dennoch finden sich in der Literatur eine Vielzahl von Lösungen, bei denen (oftmals ohne weitere Erklärungen) »Näherungswerte« für die zu bestimmenden Höhen eingeführt werden. Insbesondere für Studierende der Fachrichtung Geodäsie und Geoinformation ist diese Situation häufig sehr verwirrend. Da hat man gerade gelernt, dass es sich um ein sehr einfaches lineares Ausgleichungsproblem handelt, das grundsätzlich direkt gelöst werden kann, und beim ersten Blick in die Literatur findet man Lösungen unter Verwendung von Näherungswerten.

Ziel dieses Beitrags ist zu zeigen, dass eine direkte Lösung problemlos möglich ist. Zudem soll dem »Mysterium« der Näherungshöhen auf den Grund gegangen werden. Zunächst wird in Abschnitt 2 der Standardfall der Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell vorgestellt. Da in angeschlossenen Höhennetzen in (1) jedoch nicht nur Höhen der Neupunkte vorkommen, sondern auch die als fehlerfreie Werte einzuführenden Höhen der Anschlusspunkte, folgt eine Erweiterung der Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell für den Fall, dass Konstanten in der Ausgleichung zu berücksichtigen sind.

In einem numerischen Beispiel werden in Abschnitt 3 die direkte Lösung und die Lösung unter Verwendung von Näherungs- bzw. Kürzungswerten gezeigt. Danach werden Lösungen in der Literatur vorgestellt und kritisch betrachtet. Eine Schlussbetrachtung erfolgt in Abschnitt 4.

2 Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell

2.1 Standardfall

Betrachtet wird ein mit $n > u$ überbestimmtes *lineares* Modell

$$\mathbf{L} \approx \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{AX}, \quad (2)$$

in dem u Unbekannte

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_u \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

über die Koeffizienten- oder Funktionalmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1u} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nu} \end{bmatrix} \quad (4)$$

mit n Beobachtungen

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_n \end{bmatrix}^T \quad (5)$$

verknüpft sind. Aufgrund unvermeidlicher Messfehler kann das Gleichungssystem (2) nur näherungsweise erfüllt werden. Unter den Annahmen, dass die Messfehler lediglich zufälligen Charakter aufweisen und sich alle Messfehler lediglich auf die Komponenten des Beobachtungsvektors \mathbf{L} beziehen, bietet es sich an, den Verbesserungs- oder Residuenvektor \mathbf{v} einzuführen, die Beobachtungs- oder Verbesserungsgleichungen

$$\mathbf{L} + \mathbf{v} = \mathbf{AX}, \quad (6)$$

siehe z.B. (Niemeier 2008, S. 121), aufzustellen und die Zielfunktion

$$\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \quad (7)$$

zu minimieren, was zu einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate führt. Mit \mathbf{P} ist die Gewichtsmatrix der Beobachtungen bezeichnet, die sich aus

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_{LL}^{-1} \quad (8)$$

ergibt mit der Kofaktormatrix

$$\mathbf{Q}_{LL} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \Sigma_{LL}. \quad (9)$$

Mit Σ_{LL} ist die Varianz-Kovarianzmatrix der Beobachtungen und mit σ_0^2 der frei wählbare theoretische Varianzfaktor bezeichnet. Auf der Hauptdiagonalen von Σ_{LL} stehen die Varianzen der einzelnen Beobachtungen, auf den Nebendiagonalen die Informationen über Kovarian-

zen zwischen den Beobachtungen, siehe (Niemeier 2008, S. 143).

Stellt man die Verbesserungsgleichungen (6) nach den Residuen um und setzt

$$\mathbf{v} = \mathbf{AX} - \mathbf{L} \quad (10)$$

in die Zielfunktion (7) ein, erhält man

$$\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = (\mathbf{AX} - \mathbf{L})^T \mathbf{P} (\mathbf{AX} - \mathbf{L}). \quad (11)$$

Ausmultiplizieren und Zusammenfassen gleicher Terme liefert

$$\Omega = \hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}} - 2 \hat{\mathbf{X}}^T \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} + \mathbf{L}^T \mathbf{P} \mathbf{L}. \quad (12)$$

Um das Minimum der Zielfunktion zu bestimmen, wird die erste Ableitung der Funktion nach den Unbekannten zu null gesetzt

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \hat{\mathbf{X}}^T} = 2 \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}} - 2 \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} = \mathbf{0}. \quad (13)$$

Daraus folgen die Normalgleichungen

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L} \quad (14)$$

mit der Lösung

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}. \quad (15)$$

Die Residuen ergeben sich aus (10).

Da in vielen geodätischen Anwendungen nichtlineare funktionale Modelle verwendet werden, z.B. in der Ausgleichung von Strecken- und Richtungsnetzen, wird im Folgenden ein mit $n > u$ überbestimmtes ursprünglich *nichtlineares* Modell

$$\mathbf{L} \approx \Phi(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} \varphi_1(\mathbf{X}) \\ \varphi_2(\mathbf{X}) \\ \vdots \\ \varphi_n(\mathbf{X}) \end{bmatrix} \quad (16)$$

betrachtet, mit $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ nichtlinearen differenzierbaren Funktionen der Unbekannten. Möchte man das resultierende Ausgleichungsproblem mit dem zuvor beschriebenen linearen Ansatz lösen, müssen die ursprünglich nichtlinearen Beobachtungsgleichungen unter Verwendung geeigneter Näherungswerte \mathbf{X}^0 linearisiert werden. Dies erfolgt durch eine Reihenentwicklung nach Taylor, bei der nur die Glieder 1. Ordnung und somit die ersten Ableitungen verwendet werden, siehe z.B. (Niemeier 2008, S. 122 ff.). Dazu wird die Matrix der ersten partiellen Ableitungen nach allen Unbekannten

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J} = \left(\frac{\partial \Phi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(\mathbf{X})}{\partial X_u} \\ \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2(\mathbf{X})}{\partial X_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(\mathbf{X})}{\partial X_u} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^0} \\
 &= \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & \dots & j_{1u} \\ j_{21} & j_{22} & \dots & j_{2u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{n1} & j_{n2} & \dots & j_{nu} \end{bmatrix} \quad (17)
 \end{aligned}$$

an der Stelle $\mathbf{X} = \mathbf{x}^0$ gebildet, die als Jacobi-Matrix bezeichnet wird, siehe z.B. (Bronshtein et al. 2007, S. 897). Die Elemente der Jacobi-Matrix können dann mit $a_{11} = j_{11}$, $a_{12} = j_{12}$, ..., $a_{nu} = j_{nu}$ als Koeffizienten in der Funktionalmatrix (4) verwendet werden. Der »Umweg« über die Jacobi-Matrix \mathbf{J} ist aus didaktischen Gründen ratsam, denn somit ergibt sich eine konsistente Darstellung für die Lösung nichtlinearer Ausgleichungsprobleme durch ein linearisiertes Ersatzproblem:

- In der Koeffizientenmatrix \mathbf{A} stehen keine partiellen Ableitungen, sondern die Koeffizienten eines linearen Modells.
- Ist das Modell ursprünglich nichtlinear, kann dieses an der Stelle \mathbf{x}^0 linearisiert werden und die Jacobi-Matrix \mathbf{J} mit den partiellen Ableitungen gebildet werden.
- Die Elemente der Jacobi-Matrix \mathbf{J} können dann als Koeffizienten eines *linearisierten Ersatzmodells* in die Matrix \mathbf{A} eingetragen werden.

Unter Verwendung der verkürzten Vektoren

$$\mathbf{l} = \mathbf{L} - \Phi(\mathbf{x}^0) \quad (18)$$

sowie

$$\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{X}} - \mathbf{x}^0 \quad (19)$$

können die verkürzten Verbesserungsgleichungen

$$\mathbf{l} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \quad (20)$$

aufgestellt werden. Den Lösungsvektor erhält man analog zu (15) aus

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}, \quad (21)$$

die ausgeglichenen Unbekannten aus

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{x}^0 + \hat{\mathbf{x}}. \quad (22)$$

Da hier ein ursprünglich nichtlineares Problem mit Hilfe eines linearisierten Ersatzproblems gelöst wird, ist die Lö-

sung iterativ zu korrigieren. Dazu wird die jeweils aktuelle Lösung $\hat{\mathbf{X}}$ so lange als Näherungswerte \mathbf{x}^0 für den nächsten Iterationsschritt eingeführt, bis die Werte in $\hat{\mathbf{X}}$ einen vorgegebenen Grenzwert unterschreiten, siehe z. B. (Niemeier 2008, S. 170 ff.).

Die Residuen ergeben sich aus (20) zu

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{l}. \quad (23)$$

Sowohl für den linearen als auch für den linearisierten Fall ergibt sich der empirische Varianzfaktor zu

$$s_0^2 = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{r}, \quad (24)$$

wobei mit $r = n - u$ die Redundanz des Ausgleichungsproblems bezeichnet ist. Unter Verwendung der Kofaktormatrix der Unbekannten

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1}, \quad (25)$$

ergibt sich die empirische Varianz-Kovarianzmatrix der Unbekannten zu

$$\mathbf{S}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}} = s_0^2 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{X}}\hat{\mathbf{X}}}. \quad (26)$$

2.2 Fall mit Konstanten im funktionalen Modell

Als Erweiterung des Standardfalls wird ein mit $n > u$ überbestimmtes *lineares* Modell

$$\mathbf{L} \approx \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{C} \quad (27)$$

betrachtet, in dem u Unbekannte (3) über die Funktionalmatrix (4) sowie zusätzlich m Konstanten

$$\mathbf{C} = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_m]^T \quad (28)$$

über die Funktionalmatrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \quad (29)$$

mit n Beobachtungen (5) verknüpft sind.

Durch Einführen von Residuen analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 2.1 ergeben sich die Verbesserungsgleichungen

$$\mathbf{L} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\mathbf{C} \quad (30)$$

und mit der Substitution

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L} - \mathbf{B}\mathbf{C} \quad (31)$$

erhält man

$$\mathbf{L}' + \mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}}. \quad (32)$$

Die ausgeglichenen Unbekannten erhält man analog zu (15) aus

$$\hat{\mathbf{X}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{L}', \quad (33)$$

die Residuen ergeben sich aus (32) zu

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{L}'. \quad (34)$$

Die Berücksichtigung von Konstanten im Ausgleichungsmodell ist natürlich nicht neu und wurde bereits ausführlich z. B. in (Ebner 1973) und Baumann (1993, S. 17 ff.) beschrieben.

3 Ausgleichung angeschlossener Höhennetze

Nach Herleitung der erforderlichen Formeln soll die Ausgleichung eines angeschlossenen Höhennetzes anhand eines numerischen Beispiels veranschaulicht werden. Danach wird ein Blick in die Literatur geworfen, wo man für die Lösung dieser einfachen Ausgleichungsaufgabe unterschiedliche Ansätze findet.

3.1 Numerisches Beispiel

Das folgende numerische Beispiel ist aus (Baumann 1993, S. 29 ff.) entnommen. Abb. 1 zeigt die Netzkizze des auszugleichenden Höhennetzes. Die gemessenen Höhenunterschiede und deren Gewichte sind in Tab. 1, die Höhen der Festpunkte sind in Tab. 2 aufgeführt.

Direkte Lösung

Führt man als Unbekannte die zu bestimmenden Höhen der Neupunkte ein, ergibt sich das funktionale Modell in allgemeiner Form wie in (1). Für das numerische Beispiel resultieren nach Einführen von Residuen die folgenden ursprünglich linearen Verbesserungsgleichungen

$$\begin{aligned} L_1 + v_1 &= \hat{H}_3 - H_A \\ L_2 + v_2 &= \hat{H}_1 - H_A \\ L_3 + v_3 &= \hat{H}_1 - \hat{H}_2 \\ L_4 + v_4 &= \hat{H}_1 - H_B \\ L_5 + v_5 &= \hat{H}_2 - H_B \\ L_6 + v_6 &= H_C - \hat{H}_2 \\ L_7 + v_7 &= \hat{H}_3 - \hat{H}_2 \\ L_8 + v_8 &= \hat{H}_3 - H_C. \end{aligned} \quad (35)$$

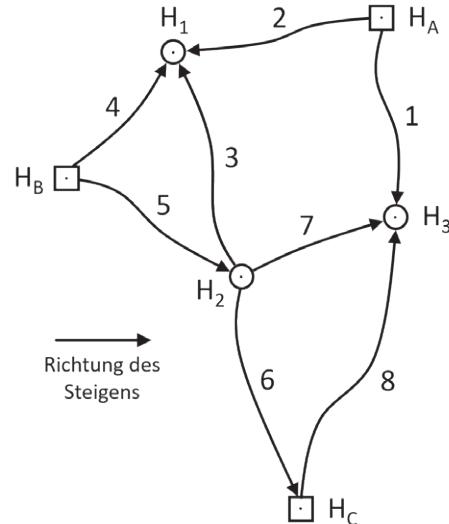


Abb. 1: Netzkizze des auszugleichenden Höhennetzes nach Baumann (1993, S. 29)

Tab. 1: Gemessene Höhenunterschiede und deren Gewichte

| Niv.-Linie Nr. | von | nach | Δh in m | Gewicht p |
|----------------|-----|------|-----------------|-------------|
| 1 | A | 3 | 2,964* | 0,87 |
| 2 | A | 1 | 0,811 | 0,82 |
| 3 | 2 | 1 | 1,765 | 0,72 |
| 4 | B | 1 | 3,220 | 1,04 |
| 5 | B | 2 | 1,463 | 0,90 |
| 6 | 2 | C | 2,693 | 0,71 |
| 7 | 2 | 3 | 3,917 | 1,12 |
| 8 | C | 3 | 1,218 | 0,55 |

* In Baumann (1993, S. 29) ist bei dieser Beobachtung offensichtlich ein Zahlendreher aufgetreten, der hier korrigiert wurde.

Tab. 2: Höhen der Festpunkte

| Punkt | H in m |
|-------|----------|
| A | 332,851 |
| B | 330,437 |
| C | 334,595 |

Da die Verbesserungsgleichungen neben den Unbekannten $\hat{H}_1, \hat{H}_2, \hat{H}_3$ auch die Höhen der Anschlusspunkte H_A, H_B, H_C als Konstanten enthalten, liegen Gleichungen in der Form (30) vor. Somit ist eine Ausgleichung mit Konstanten im funktionalen Modell gemäß Abschnitt 2.2 durchzuführen.

Zunächst werden aus den gegebenen Werten in Tab. 1 der Beobachtungsvektor \mathbf{L} (siehe Tab. 3), und die zugehörige Gewichtsmatrix

$$\mathbf{P} = \text{diag} [0,87 \ 0,82 \ 0,72 \ 1,04 \ 0,90 \ 0,71 \ 1,12 \ 0,55] \quad (36)$$

aufgestellt. Die Unbekannten werden im Vektor

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 & \hat{H}_2 & \hat{H}_3 \end{bmatrix}^T, \quad (37)$$

die Konstanten im Vektor

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} H_A & H_B & H_C \end{bmatrix}^T \quad (38)$$

zusammengefasst. Aus (35) lassen sich die Koeffizienten sowohl der Unbekannten als auch der Konstanten sehr einfach ablesen und in die Koeffizientenmatrizen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 & \hat{H}_2 & \hat{H}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} H_A & H_B & H_C \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

eintragen. Danach wird der um die Konstanten reduzierte Beobachtungsvektor \mathbf{L}' gemäß (31) aufgestellt. Die numerischen Werte sind in Tab. 3 aufgelistet. Die ausgeglichenen Höhen ergeben sich aus (33) zu

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 333,6605 & 331,8988 & 335,8149 \end{bmatrix}^T \text{ [m]}, \quad (40)$$

die Residuen \mathbf{v} aus (34) sind ebenfalls in Tab. 3 aufgeführt.

Lösung mit Kürzungswerten für die Unbekannten

Obwohl es sich bei der Ausgleichung eines angeschlossenen Höhennetzes um ein lineares Ausgleichungsproblem handelt, das direkt gelöst werden kann, findet man in der Literatur (siehe Abschnitt 3.2) eine Vielzahl von Beiträgen, in denen zur Lösung (oftmals ohne weitere Erklärungen) Näherungswerte für die zu bestimmenden Höhen eingeführt werden. Für Anwenderinnen und Anwender ergibt sich eine verwirrende Situation.

Tab. 3: Vektoren aus der Ausgleichung des Höhennetzes

| L in m | BC in m | L' in m | v in mm |
|--------|----------|----------|---------|
| 2,964 | -332,851 | 335,815 | -0,08 |
| 0,811 | -332,851 | 333,662 | -1,52 |
| 1,765 | 0 | 1,765 | -3,31 |
| 3,220 | -330,437 | 333,657 | 3,48 |
| 1,463 | -330,437 | 331,900 | -1,21 |
| 2,693 | 334,595 | -331,902 | 3,21 |
| 3,917 | 0 | 3,917 | -0,88 |
| 1,218 | -334,595 | 335,813 | 1,92 |

Um Konfusion zu vermeiden, ist eine strikte begriffliche Trennung hilfreich. Loether und Strehle (2007, S. 7–4) schlagen vor, zwischen Näherungs- und Kürzungswerten zu unterscheiden:

- Hinreichend genaue Näherungswerte *müssen* bei nicht-linearen Ausgleichungsproblemen eingeführt werden, wenn diese durch iterative Lösung eines an der Stelle von Näherungswerten linearisierten Ersatzproblems gelöst werden sollen.
- Beliebige Kürzungswerte *können* bei linearen Ausgleichungsproblemen aus numerischen Gründen eingeführt werden, wenn man mit kleineren Zahlen rechnen möchte. Unter Verwendung heutiger moderner Rechenhilfsmittel kann jedoch darauf verzichtet werden.

Bezüglich der Ausgleichung von Höhennetzen weisen z. B. Baumann (1993, S. 25) und Augath in (Pelzer 1985, S. 449) darauf hin, dass der Parametervektor durch Einführung von Näherungshöhen gekürzt werden kann, um mit kleineren Zahlen rechnen zu können. Es handelt sich somit um die Einführung von Kürzungswerten.

Zur Veranschaulichung soll das numerische Beispiel erneut durchgerechnet werden, wobei nun mit

$$\begin{aligned} H_A &= 332,851 & H_B &= 330,437 & H_C &= 332,851 \\ + L_2 &= 0,811 & + L_5 &= 1,463 & + L_1 &= 2,964 \\ \hline H_1^0 &= 333,662 & H_2^0 &= 331,900 & H_3^0 &= 335,815 \end{aligned} \quad (41)$$

Kürzungswerte für die Unbekannten eingeführt werden, die im Vektor

$$\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} H_1^0 & H_2^0 & H_3^0 \end{bmatrix}^T \quad (42)$$

zusammengefasst werden. Die Lösung unter Einführung von Kürzungswerten wird auch in (Baumann 1993, S. 29 ff.) gezeigt. Der verkürzte Beobachtungsvektor ergibt sich zu

$$\mathbf{L} = \mathbf{L} - \mathbf{F}(\mathbf{X}^0, \mathbf{C}) = \mathbf{L} - (\mathbf{A}\mathbf{X}^0 + \mathbf{B}\mathbf{C}). \quad (43)$$

Vergleicht man die numerischen Werte der Vektoren \mathbf{L} und \mathbf{l} in Tab. 4, so fällt auf, dass in \mathbf{l} lediglich kleine Werte

Tab. 4: Vektoren aus der Ausgleichung des Höhennetzes

| L in m | AX ⁰ in m | BC in m | l in mm |
|--------|----------------------|----------|---------|
| 2,964 | 335,815 | -332,851 | 0 |
| 0,811 | 333,662 | -332,851 | 0 |
| 1,765 | 1,762 | 0 | 3 |
| 3,220 | 333,662 | -330,437 | -5 |
| 1,463 | 331,900 | -330,437 | 0 |
| 2,693 | -331,900 | 334,595 | -2 |
| 3,917 | 3,915 | 0 | 2 |
| 1,218 | 335,815 | -334,595 | -2 |

im Millimeterbereich und die Werte null auftreten. Das hatte zu Zeiten der Auswertung per Handrechnung oder mit dem Taschenrechner sicherlich erhebliche Vorteile.

Die Lösung aus (21) ergibt sich zu

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1,515 & -1,207 & -0,083 \end{bmatrix}^T [\text{mm}], \quad (44)$$

die ausgeglichenen Höhen der Neupunkte erhält man aus (22) zu

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 333,6605 & 331,8988 & 335,8149 \end{bmatrix}^T [\text{m}], \quad (45)$$

was natürlich mit (40) übereinstimmt.

3.2 Lösungen in der Literatur

Im Folgenden sollen Lösungen in der Literatur vorgestellt und kritisch betrachtet werden. Die ausgewählten Literaturquellen werden in umgekehrter chronologischer Reihenfolge besprochen.

Beispiel »Lehmann«

Lehmann (2023, S. 298 ff.) präsentiert ein Höhennetz, in dem unter Anschluss an zwei Festpunkte zwei Neupunkte zu bestimmen sind. Nach Vorstellung des funktionalen Zusammenhangs gemäß (1) wird ausgeführt, dass »*wir als Ableitungen nur 0, 1 und -1*« erhalten, die dann in die Funktionalmatrix \mathbf{A} eingetragen werden. Bezuglich der Werte 0, 1 und -1 wäre es sachgerechter, von Koeffizienten der linearen Verbesserungsgleichungen zu sprechen, die in die Funktionalmatrix \mathbf{A} eingetragen werden. In einem numerischen Beispiel werden Näherungswerte für die Neupunkthöhen eingeführt und es werden die »*linearisierten Verbesserungsgleichungen*« gemäß (20) für das Höhennetz aufgestellt. Die Lösung auf S. 315 wird gemäß (21) und (22) berechnet.

Auf S. 297 ff. führt Lehmann (2023) aus, dass er auch bei ursprünglich linearen Beobachtungsgleichungen Kürzungswerte für die Unbekannten einführt, um »*mit kurzen Zahlen arbeiten zu können*«. Diese Vorgehensweise zeigt sich daher auch bei der Lösung weiterer linearer Ausgleichungsprobleme. Auf S. 301 ff. behandelt Lehmann (2023) ausgleichende Funktionen in Form von Polynomen. Für den Fall, dass die Abszissenwerte als feste Größen und die Ordinatenwerte als Beobachtungen eingeführt werden, resultieren lineare Funktionen, was auf S. 302 festgestellt wird. Direkt danach wird dann beschrieben, wie Näherungswerte für die Unbekannten bereitgestellt werden können. Ein numerisches Beispiel vom Typ ausgleichende Gerade wird dann auf S. 302 ff. unter Einführung von Näherungswerten für die Unbekannten gelöst.

Diese Vorgehensweise ist zumindest diskussionswürdig, denn wenn ein Ausgleichungsproblem direkt gelöst werden kann, d.h. ohne Einführung von Näherungs- bzw. Kürzungswerten, dann sollte die Lösung auch auf direktem

Wege erfolgen und nicht in das Konzept der »Linearisierung« gepresst werden.

Beispiel »Benning«

Benning (2011) stellt auf S. 242 ff. ein Beispiel zur Höhennetzausgleichung vor. Es wird festgestellt, dass lineare Beziehungen bestehen, wobei neben den gemessenen Höhenunterschieden auch konstante Anschlusshöhenwerte in die Berechnung eingehen. Es wird festgestellt, dass konstante Größen im ursprünglichen Gauß-Markov-Modell, siehe (6), nicht enthalten sind. Zur Lösung des numerischen Beispiels ab S. 244 werden die Höhen der Anschlusspunkte auf die linke Seite der Verbesserungsgleichungen gebracht, was einer Ausgleichung mit einem Beobachtungsvektor \mathbf{L}' gemäß (31) entspricht.

Anhand von Beispielen zur linearen Regression (Regressionsgerade, Regressionsparabel) zeigt Benning (2011, S. 156 ff.) die direkte Lösung linearer Ausgleichungsprobleme. Näherungswerte für die Unbekannten werden erst bei nichtlinearen funktionalen Modellen eingeführt, wie bei der Verwendung der Exponentialfunktion auf S. 163.

Beispiel »Niemeier«

Niemeier (2008, S. 153 ff.) präsentiert ein Nivellementsnetz, das an einen Höhenfestpunkt angeschlossen ist. Nach der Feststellung, dass das funktionale Modell (1) linear ist, werden sodann die Koeffizientenmatrix \mathbf{A} und ein gekürzter Beobachtungsvektor \mathbf{l} angegeben. Erläuterungen, warum in einem ursprünglich linearen Ausgleichungsproblem ein gekürzter Beobachtungsvektor verwendet wird, werden nicht gegeben. Auch die verwendeten Näherungswerte für die Höhen der Neupunkte werden nicht genannt. Aus den Werten im gekürzten Beobachtungsvektor \mathbf{l} , die sich im Bereich weniger Millimeter bewegen oder den Wert null aufweisen, ist jedoch rekonstruierbar, wie diese aus der Festpunktthöhe und den gemessenen Höhenunterschieden berechnet wurden.

Wünschenswert wären Erläuterungen, warum das ursprünglich lineare Ausgleichungsproblem unter Verwendung von Näherungs- bzw. Kürzungswerten gelöst wird. Eine Darstellung der Berechnung der Kürzungswerte wäre ebenfalls hilfreich.

Interessanterweise wird in (Niemeier 2008, S. 381 ff.) ein anderes ebenfalls lineares Ausgleichungsproblem, nämlich die Bestimmung einer ausgleichenden Geraden mit festen x -Werten und den y -Werten als Beobachtungen ohne die Einführung von Näherungs- bzw. Kürzungswerten gelöst. Ein numerisches Beispiel auf S. 386 ff. veranschaulicht die direkte Lösung.

Beispiel »Caspary und Wichmann«

Caspary und Wichmann (2007, S. 60 ff.) zeigen ein numerisches Beispiel für die Höhenbestimmung eines Neupunktes durch Nivellement zu sechs Festpunkten. Ohne

Erklärung wird ein Näherungswert für die zu bestimmende Höhe des Neupunktes eingeführt und ein verkürzter Beobachtungsvektor \mathbf{l} gemäß (18) für die weiteren Berechnungen verwendet. Das lineare Problem der Bestimmung einer ausgleichenden Geraden ab S. 124 wird dann jedoch ohne Einführung von Näherungswerten beschrieben.

Beispiel »Jäger et al.«

Jäger et al. (2005, S. 2 ff.) erläutern im Abschnitt »Einführung in die Modellierung der Ausgleichungsaufgabe«, dass die Höhenbestimmung mit einem funktionalen Modell gemäß (1) zu linearen Beobachtungsgleichungen führt. Danach wird am Beispiel des funktionalen Zusammenhangs für die Streckenberechnung aus kartesischen Koordinaten die Notwendigkeit der Überführung nichtlinearer Beobachtungsgleichungen in linearisierte Gleichungen aufgezeigt. Nach der Darstellung der linearisierten Beobachtungsgleichung wird ausgeführt, dass diese Darstellung auch für von Anfang an lineare Modelle, wie im Beispiel der Höhenbestimmung, verwendet werden kann. Einziger Unterschied ist, dass die Näherungswerte für die unbekannten Parameter dabei beliebig gewählt werden können. So wird dann auch das Beispiel zur Höhenbestimmung auf S. 9 unter Einführung eines Näherungswertes für die zu bestimmende Höhe gelöst.

Ein anderes lineares Ausgleichungsproblem, nämlich die Bestimmung einer ausgleichenden Geraden mit x -Werten als festen Größen und y -Werten als Beobachtungen wird hingegen ab S. 309 ohne die Einführung von Näherungswerten für die Unbekannten dargestellt.

Beispiele »Baumann«

Baumann (1993) präsentiert ab S. 3 ein Einführungsbeispiel für die Ausgleichung eines Höhennetzes. Nach dem Aufstellen der ursprünglichen Verbesserungsgleichungen, vergleichbar mit denen in (35), wird festgestellt, dass sich der Ansatz wie folgt ausdrücken lässt: »Beobachtung + Verbesserung = Funktion der Unbekannten + Festwerte«.

Es wird somit klar benannt, dass für das lineare Ausgleichungsproblem Verbesserungsgleichungen der Form (30) vorliegen. Die Lösung dieses Beispiels erfolgt »per Hand«, also ohne Vektor- und Matrizenrechnung, was aus didaktischer Sicht hervorragend ist, da alle Auswerteschritte klar erkennbar sind.

Auch bei der »Einführung der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen in Matrizen« ab S. 17 werden Festwerte berücksichtigt, so dass sich die ursprünglichen Verbesserungsgleichungen analog zu (30) ergeben. Das Aufstellen der Normalgleichungen und die Berechnung der Unbekannten erfolgt vergleichbar zu den Herleitungen in Abschnitt 2.2. Ab S. 21 ff. wird das Einführungsbeispiel von S. 3 nochmals aufgegriffen und unter Berücksichtigung von Konstanten im Ausgleichungsmodell erneut durchgerechnet.

Ab S. 25 bespricht Baumann (1993) die Einführung von Näherungswerten für die Unbekannten mit Bezug auf das Beispiel Höhennetz:

»Bei unserem Einführungsbeispiel fallen die großen Absolutglieder auf. Diese wirken sich nachteilig auf die Zahlenrechnung aus (es muss mit einigen Stellen mehr gerechnet werden, da die vollen Höhen mitgeschleppt werden, obwohl nur Millimeterbeträge auszugleichen sind), besonders weil mehrmals die großen Zahlen eingetippt werden müssen und wenn der Rechner nicht mit einer ausreichenden Anzahl von Stellen arbeitet.«

Es ist sehr positiv zu bewerten, dass der Grund für die Einführung von Näherungs- bzw. Kürzungswerten klar benannt wird. Diese Begründung hatte vor einigen Jahrzehnten, z. B. bei der Lösung derartiger Aufgaben mit dem Taschenrechner unbestreitbar ihre Daseinsberechtigung. Bei Nutzung heutiger Rechentechnik und Softwaretools wie MatLab, Octave oder Python ist die Notwendigkeit der Einführung von Näherungs- bzw. Kürzungswerten aus numerischen Gründen nicht mehr gegeben.

Ab S. 29 zeigt Baumann (1993) an einem weiteren Beispiel sowohl die direkte Lösung für die Ausgleichung des Höhennetzes als auch die Lösung unter Einführung von Kürzungswerten für die Höhen der Neupunkte. Dieses Beispiel wurde in Abschnitt 3.1 verwendet und der Lösungsweg in Baumann (1993) ist vergleichbar mit dem im genannten Abschnitt.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Ausgleichung angeschlossener Höhennetze in Baumann (1993) in hervorragender Weise dargestellt wird:

- Die Ausgleichung eines Höhennetzes »per Hand« (ohne Vektoren und Matrizen) schärft das Verständnis für die einzelnen Auswerteschritte in einer Ausgleichung.
- Die Ausgleichung im Gauß-Markov-Modell unter Berücksichtigung additiver Konstanten wird anschaulich motiviert und die Lösung des Ausgleichungsproblems wird hergeleitet.
- Die Einführung von Kürzungswerten für die zu bestimmenden Höhen wird begründet, nämlich dahingehend, dass man mit kleineren Zahlenwerten rechnen kann.

Beispiel »Höpcke«

Höpcke (1980, S. 83 ff.) beschreibt die Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit nichtlinearen ursprünglichen Fehlergleichungen durch Linearisierung. Nach Herleitung des Formelapparats wird auf S. 86 das Beispiel eines Höhennetzes vorgestellt, für dessen Ausgleichung Näherungswerte für die zu bestimmenden Höhen eingeführt werden. Warum ausgerechnet eine ursprünglich lineare Aufgabenstellung als Beispiel für ein linearisiertes Ausgleichungsproblem verwendet wird, wird nicht erläutert.

Beispiel »Reißmann«

Reißmann (1976) stellt auf S. 68 ff. zunächst die ursprünglichen Verbesserungsgleichungen für ein Nivellementsnetz auf und führt direkt danach Näherungswerte für die zu bestimmenden Höhen der Neupunkte ein. Ein Zahlenbeispiel zu dieser Vorgehensweise ist auf S. 90 ff. zu finden. Eine Erklärung für die Einführung von Näherungswerten wird nicht gegeben.

Beispiele »Wolf«

Wolf (1968, S. 200) erläutert das Aufstellen der Verbesserungsgleichungen für die Ausgleichung von Höhennetzen nach vermittelnden Beobachtungen und führt aus, dass es sich empfiehlt, Näherungswerte für die Unbekannten einzuführen, was an einem Zahlenbeispiel auf S. 202 gezeigt wird. In (Wolf 1975, S. 127 ff.) werden erneut die Verbesserungsgleichungen für die gleiche Aufgabenstellung angegeben. Ist eine fest zu belassende Anschlusshöhe zu berücksichtigen, so wird diese auf die betreffenden Beobachtungen addiert, was dann zu einer Ausgleichung mit einem Beobachtungsvektor gemäß (31) führt. In einem Zahlenbeispiel in (Wolf 1979, S. 52 ff.) werden dann jedoch wieder Näherungswerte für die zu bestimmenden Höhen der Neupunkte eingeführt.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass sowohl der Ansatz mit Konstanten im funktionalen Modell aus Abschnitt 2.2 als auch der Ansatz mit Kürzungswerten für die Unbekannten aus Abschnitt 3.1 vorgestellt wird. Die Zahlenbeispiele werden jedoch nur unter Einführung von Kürzungswerten für die Unbekannten ausgeglichen. Eine Erklärung für die Einführung von Näherungs- bzw. Kürzungswerten wird nicht angegeben.

Weitere Literaturquellen

Eine umfangreiche Untersuchung von Höhenmessungen und deren Auswertungen präsentiert Eichhorn (1954). Die Ausgleichung von Höhennetzen nach vermittelnden Beobachtungen wird auf S. 27 mit der Feststellung eingeführt, dass zunächst für die Unbekannten Näherungswerte bestimmt werden. Eine Begründung dafür wird nicht angegeben.

Jordan et al. (1956) präsentieren ab S. 265 eine umfangreiche Abhandlung zur Ausgleichung von Nivellementsnetzen. Der Abschnitt zur Ausgleichung eines Höhennetzes nach vermittelnden Beobachtungen ab S. 278 beginnt gleich im ersten Satz mit der Feststellung, dass Näherungswerte für die zu bestimmenden Höhen eingeführt werden. Eine Erläuterung für diese Vorgehensweise wird nicht gegeben.

Fazit

Es lässt sich feststellen: Je älter die Publikationen sind, desto selbstverständlicher erscheint die Einführung von Näherungswerten für die zu bestimmenden Höhen der Neupunkte. Es liegt die Vermutung nahe, dass dies mit den zur

Verfügung stehenden Rechenhilfsmitteln in damaliger Zeit zusammenhängt. Die Bestätigung dieser Annahme liefert Egerer (1929), der die vermittelnde und die bedingte Ausgleichung von Höhennetzen vergleicht und dazu Folgendes ausführt:

»Wesentlich für die Einfachheit der Rechnung bei beiden Verfahren ist die ausschließliche Verwendung des gewöhnlichen 25 cm-Rechenschiebers, die bei Einwägungen II. Ordnung im allgemeinen stets möglich ist, wenn nur die Gewichtseinheit, die Längeneinheit für die Absolutglieder der Normalgleichungen, sowie die Näherungswerte der Unbekannten zweckmäßig gewählt werden.«

4 Schlussbetrachtung

Auffällig ist, dass in vielen Fachbüchern das lineare Problem der Ausgleichung eines angeschlossenen Höhennetzes unter Verwendung von Näherungs- bzw. Kürzungswerten für die Unbekannten gelöst wird, wohingegen z. B. das lineare Problem der Bestimmung einer ausgleichenden Geraden direkt, d. h. ohne die Einführung von Näherungswerten, erfolgt. Ein Rückblick in die Literatur hat Folgendes ergeben:

- Die Einführung von Näherungs- bzw. Kürzungswerten zur Lösung des ursprünglich linearen Problems der Ausgleichung angeschlossener Höhennetze geht auf die Zeit des Rechenschiebers zurück, um mit kleineren Zahlen rechnen zu können. Diese Vorgehensweise hat sich derart manifestiert, dass sie auch heute noch in vielen Fachbüchern zu finden ist.
- Hinweise, dass Näherungswerte zu kleineren Zahlen, weniger Tipparbeit bei Verwendung eines Taschenrechners oder zu einer numerisch günstigeren Lösung führen, findet man in Publikationen aus den 1980er und 1990er Jahren, siehe (Pelzer 1985, S. 449) und (Bauermann 1993, S. 25).
- In aktuellen Fachbüchern werden Näherungswerte für die zu bestimmenden Höhen der Neupunkte ohne Erklärungen eingeführt, siehe (Niemeier 2008, S. 153 ff.), teilweise werden sogar diskussionswürdige Erklärungen (»Linearisierung«) für deren Einführung angeführt, siehe (Lehmann 2023, S. 298 ff.).

Im Vorblick ist es wünschenswert, wenn bei der Neuauflage von Fachbüchern die direkte Lösung der Ausgleichung von angeschlossenen Höhennetzen gezeigt wird, wobei das Problem der Berücksichtigung von Konstanten im Ausgleichungsmodell mit abgehandelt werden kann.

Im Anschluss daran kann die Lösung unter Verwendung von Kürzungswerten für die Unbekannten gezeigt werden, mit den entsprechenden Hinweisen zur Historie dieser Lösung. Auf jeden Fall muss der Eindruck vermieden werden, dass angeschlossene Höhennetze grundsätzlich nur unter Einführung von Näherungs- bzw. Kürzungswerten für die Höhen der Neupunkte ausgeglichen werden können.

Literatur

- Benning, W. (2011): Statistik in Geodäsie, Geoinformation und Bauwesen. 4., überarbeitete und erweiterte Auflage. Wichmann, Berlin und Offenbach.
- Baumann, E. (1993): Vermessungskunde Band 2, Punktbestimmung nach Höhe und Lage. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn.
- Bronshtein, I. N., Semendyayev, K. A., Musiol, G., Muehlig, H. (2007): Handbook of Mathematics, 5th Ed. Springer Berlin, Heidelberg, New York.
- Caspary, W., Wichmann, K. (2007): Auswertung von Messdaten – Statistische Methoden für Geo- und Ingenieurwissenschaften. Oldenbourg Verlag, München, Wien.
- Ebner, H. (1973): Zusätzliche Parameter in Ausgleichungen. ZfV – Zeitschrift für Vermessungswesen (98), 385–391.
- Egerer, A. (1929): Vermittelnde oder bedingte Ausgleichung von Höhennetzen. Zeitschrift für Vermessungswesen (58), 104–111, 176–186.
- Eichhorn, G. (1954): Untersuchung von Feinheitenmessungen. Deutsche Geodätische Kommission (DGK), Reihe C, Nr. 11, München.
- Jordan, W., Eggert, O., Kneissl, M. (1956): Handbuch der Vermessungskunde. Zehnte, völlig neu bearbeitete und neu gegliederte Ausgabe, Band III, Höhenmessung, Tachymetrie. J.B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart.
- Höpcke, W. (1980): Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung. Walter de Gruyter, Berlin, New York.
- Jäger, R., Müller, T., Saler, H., Schwäble, R. (2005): Klassische und robuste Ausgleichsverfahren. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg.
- Lehmann, R. (2023): Geodätische und statistische Berechnungen. Springer Spektrum, Berlin, Heidelberg.
- Loether, G., Strehle, J. (2007): Ausgleichsrechnung, Methode der kleinsten Quadrate. Fakultät für Geoinformation, Hochschule München.
- Niemeier, W. (2008): Ausgleichsrechnung – Statistische Auswertemethoden. 2. Auflage, Walter de Gruyter, Berlin, New York.
- Pelzer, H. (1985): Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung II. Konrad Wittwer, Stuttgart.
- Reißmann, G. (1976): Die Ausgleichsrechnung. Vierte, vollständig neubearbeitete Auflage. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin.
- Wolf, H. (1968): Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn.
- Wolf, H. (1975): Ausgleichsrechnung, Formeln zur praktischen Anwendung. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn.
- Wolf, H. (1979): Ausgleichsrechnung II, Aufgaben und Beispiele zur praktischen Anwendung. Ferd. Dümmlers Verlag, Bonn.

Kontakt

Prof. Dr.-Ing. Frank Neitzel
Technische Universität Berlin
Institut für Geodäsie und Geoinformationstechnik
Straße des 17. Juni 135, 10623 Berlin
frank.neitzel@tu-berlin.de

Dieser Beitrag ist auch digital verfügbar unter www.geodaeisie.info.